

Regione Toscana
Accordo di Programma Quadro Ricerca e trasferimento tecnologico per il sistema produttivo
III Accordo integrativo



Rapporto integrativo sulla modellistica matematica

Pacco di lavoro: WP.3 - Definizione dei modelli matematici
Task 3.1 - Definizione del modello

A cura di: DIPMAT - Dipartimento di Matematica "U. Dini" - Università di Firenze

Data compilazione: Ottobre 2010

Indice

1	Introduzione	3
2	Analisi di scaling	3
2.1	Varibili adimensionali	4
2.2	Grandezze caratteristiche	5
2.3	Il raggio caratteristico di influenza del pozzo	6
3	Scaling nel caso non lineare	10
4	Un modello di flusso non-Darciano e multifase nella regione di bacino in prossimità del pozzo	15
4.1	La definizione del problema	18
4.2	L'algoritmo numerico e il relativo codice DNDmultiphase	21
5	Modelli per un'analisi approfondita del flusso bifase nel bacino geotermico	21
6	Un modello 1D del bacino	24
6.1	Il modello Meacci	25
6.2	Discontinuità al contorno libero	26
6.3	Risultati	27
6.3.1	Simulazioni	28
6.4	La ricarica del bacino	31
6.4.1	Il tempo di ricarica	32
6.5	Il modello completo	33
6.6	Set up finale e simulazioni	34
6.6.1	Risultati numerici	34
6.7	Conclusioni e piano di lavoro	35
7	Modello di cluster con densità discontinua	36
7.1	Setup del modello	36
7.2	Risultati preliminari	38
7.3	L'effetto delle condizioni al bordo	40
7.4	Qualche riflessione	42
8	Piano di lavoro per attività futura	45

1 Introduzione

In questo rapporto descriviamo alcune attività integrative che sono state portate avanti nell'ambito del progetto MAC-GEO, inerenti la modellistica matematica dei processi geotermici.

Tali attività non erano espressamente richiamate nel progetto esecutivo, ma risultano essere degli interessanti risultati della ricerca, soprattutto in vista di un futuro ampliamento e proseguimento dello studio in oggetto.

Infatti, anche se esse non saranno inserite nello strumento finale di simulazione (si veda Prodotto P4.2) la maggior parte di essi sono stati definiti in modo da essere tradotti in futuri moduli aggiuntivi del codice di simulazione.

Il documento è organizzato come segue. Nella sezione 2, è svolta una analisi dimensionale delle equazioni di bilancio di massa e di energia generali del bacino geotermico. Come si vedrà, da questa semplice analisi dimensionale si ottengono significative informazioni sulle caratteristiche principali della dinamica del bacino, sui tempi di rilassamento del sistema, sulle dimensioni caratteristiche e la grandezza dei vari termini che compaiono nei bilanci. Da queste grandezze, come si vedrà in sez. 2.3, si ottengono inoltre informazioni sui flussi di ricarica del pozzo e sulla possibilità di ricarica locale. Nella Sezione 3, l'analisi dimensionale è estesa all'ipotesi di flusso non Darciano. Come si vedrà, alcune delle considerazioni derivanti dal caso lineare, si ritrovano anche nel caso non lineare.

Nella Sez. 4, si introduce la possibilità di trattare l'equazione di bilancio del momento attraverso relazioni non lineari di tipo *Forchheimer* nei dintorni dei punti di prelievo. La motivazione di tale analisi è legata alle velocità dei fluidi geotermici che, verosimilmente, specialmente in condizioni di prelievo a velocità del suono (*choked flow*), superano di molto i limiti di applicabilità della legge di Darcy. Come si vedrà, anche in presenza di termini non lineari è possibile derivare un modello dal quale calcolare l'equivalente del *productivity index*. Il modello è valutato per un sistema bifase liquido-gas monocomponente, in analogia con quanto fatto attualmente nel caso di flusso Darciano.

Nella Sez. 5 sono riassunti alcuni dei risultati derivanti dalla introduzione di relazioni non lineari tipo *Forchheimer* nel bacino geotermico. In particolare, si affrontano alcuni aspetti particolari del flusso bifase ottenuto dalle relazioni non lineari, in confronto con il caso Darciano. Tali risultati saranno poi inclusi in alcune pubblicazioni in via di valutazione.

Nelle Sez. 6 e 7, si affronta una modellizzazione semplificata unidimensionale di un pozzo o di un cluster di pozzi. Attraverso l'inclusione di termini via via più complessi, si riesce ad ottenere un ritratto del comportamento dinamico di un sistema di pozzi geotermici che ha molte affinità con la simulazione complessiva. In particolare, nella Sez. 7.3 si affrontano alcune questioni legate alle condizioni al bordo, che rappresentano uno dei lati più oscuri del sistema da simulare. Come si vede, la scelta delle condizioni al bordo è determinante, non solo per l'instaurarsi di soluzioni stazionarie, ma anche per l'instaurarsi di regimi di flusso del tutto particolari, in cui fasi liquide e gassose si alternano in profondità. Sebbene tali conclusioni siano in parte dovute alle approssimazioni fatte, permettono di derivare alcune considerazioni che, verosimilmente, valgono più in generale, anche a scala di reservoir.

2 Analisi di scaling

In questa sezione, a partire dalle equazioni di bilancio di massa ed energia in forma standard, cerchiamo di valutare quali sono le grandezze caratteristiche attraverso cui adimensionalizzare il sistema di equazioni. Come si vedrà, aldilà di rendere il sistema di equazioni più facilmente trattabile numericamente, in quanto tutte le grandezze sono omogeneizzate a grandezze di ordine

uno, permette anche di fare alcune considerazioni sulle caratteristiche del sistema che risultano poi propedeutiche alla definizione degli scenari di simulazione.

2.1 Varibili adimensionali

Al fine di rendere adimensionali le equazioni di conservazione di bilancio e di massa, procediamo prima di tutto a ricordarne la forma. L'equazione di bilancio di massa per componente, dopo aver sommato tra fase liquida e gassosa risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi S^G \rho_i^G + \phi(1 - S^G) \rho_i^L] + \nabla [J_i^G + J_i^L] = \phi [S^G \rho_i^G + (1 - S^G) \rho_i^L] \psi^{out} \quad (2.1)$$

Introducendo la densità della parent $\rho_i^{(0)} = S^G \rho_i^G + (1 - S^G) \rho_i^L$ e sostituendo il valore dei flussi di Darcy, risulta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i^{(0)}) - \nabla \left[\frac{\kappa^G}{\mu^G} (\nabla P^G + \rho^G g) \rho_i^G + \frac{\kappa^L}{\mu^L} (\nabla P^L + \rho^L g) \rho_i^L \right] = \rho_i^{(0)} \psi^{out} \quad (2.2)$$

Per semplicità, nella precedente, abbiamo eliminato la porosità, ipotizzando, ad esempio, una porosità omogenea e costante.

Introduciamo ora una densità adimensionale $\tilde{\rho}$ tale che $\rho = \rho_0 \tilde{\rho}$ e una pressione adimensionale \tilde{P} tale che $P = P_0 \tilde{P}$. Dove ρ_0 e P_0 sono valori costanti caratteristici. Introduciamo inoltre un tempo adimensionale tale che $t = \tau \tilde{t}$ e riscaliamo tutte le variabili spaziali per una grandezza caratteristica L , tale che, ad esempio, $x = L \tilde{x}$. Per semplicità di notazione, invertiamo il ruolo delle variabili adimensionali con le loro corrispondenti dimensionali $\tilde{\alpha} \leftrightarrow \alpha$. Con queste notazioni, l'equazione precedente diventa

$$\frac{\rho_0}{\tau} \frac{\partial \rho_i^{(0)}}{\partial \tilde{t}} - \frac{g \kappa \rho_0^2}{\mu^G L} \nabla \left[\frac{P_0 k^G}{\rho_0 g L} \nabla P^G + \frac{P_0 k^L}{\rho_0 g L} \frac{\mu^G}{\mu^L} \nabla P^L + k^G \rho^G \rho_i^G \mathbf{k} + k^L \rho^L \rho_i^L \frac{\mu^G}{\mu^L} \mathbf{k} \right] = \rho_0 \rho_i^{(0)} \psi^{out} \quad (2.3)$$

dove abbiamo riscalo le permeabilità κ^α per una permeabilità caratteristica κ tale che $\kappa^\alpha = \kappa k^\alpha$. Semplificando e raccogliendo alcuni termini otteniamo quindi

$$\frac{\partial \rho_i^{(0)}}{\partial \tilde{t}} - \frac{g \kappa \rho_0 \tau}{\mu^G L} \nabla \left[\frac{P_0}{\rho_0 g L} k^G \rho_i^G \nabla P^G + \frac{P_0}{\rho_0 g L} k^L \rho_i^L \nabla P^L \frac{\mu^G}{\mu^L} + k^G (\rho^G)^2 x_i^G \mathbf{k} + k^L (\rho^L)^2 x_i^L \frac{\mu^G}{\mu^L} \mathbf{k} \right] = \rho_i^{(0)} \tau \psi^{out} \quad (2.4)$$

Se adesso scegliamo

$$P_0 = \rho_0 g L \quad (2.5)$$

$$\tau = \frac{\mu^G L}{g \kappa \rho_0} \quad (2.6)$$

La precedente si riduce a

$$\frac{\partial \rho_i^{(0)}}{\partial \tilde{t}} - \nabla \left[k^G \rho^G x_i^G \nabla P^G + k^L \rho^L x_i^L \frac{\mu^G}{\mu^L} \nabla P^L + k^G (\rho^G)^2 x_i^G \mathbf{k} + k^L (\rho^L)^2 x_i^L \frac{\mu^G}{\mu^L} \mathbf{k} \right] = \tau \rho_i^{(0)} \psi^{out} \quad (2.7)$$

Ripetiamo ora la stessa procedura per l'equazione di conservazione dell'energia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} [(1 - \phi) \rho_r c_r T + \phi (\rho^G S^G u^G + \rho^L (1 - S^G) u^L)] + \\ & - \nabla \left[\frac{\kappa k^G \rho^G}{\mu^G} (\nabla P^G + \rho^G g \mathbf{k}) h^G + \frac{\kappa k^L \rho^L}{\mu^L} (\nabla P^L + \rho^L g \mathbf{k}) h^L \right] = \\ & \nabla [(1 - \phi) \lambda_r + \phi (\lambda^G S^G + (1 - S^G) \lambda^L) \nabla T] - \phi (S^G \rho^G u^G + (1 - S^G) \rho^L u^L) \psi^{out} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Eliminiamo ancora una volta le porosità, per alleggerire la notazione e introduciamo altre variabili adimensionali come $\tilde{T} = T/T_0$, $\tilde{u} = u/u_0$, $\tilde{h} = h/h_0$, ancora una volta invertendo poi il ruoli delle grandezze dimensionali e non. Riscaliamo inoltre la conducibilità termica della roccia $\lambda_r = \lambda_0 \tilde{\lambda}_r$ e delle fasi $\lambda^\alpha = \lambda_0 \tilde{\lambda}^\alpha$. Lo stesso può essere fatto per i calori specifici $c_r = c_0 \tilde{c}_r$. L'algebra questa volta è leggermente più complessa rispetto al caso precedente. Tuttavia, scegliendo

$$h_0 = u_0 \quad (2.9)$$

$$u_0 = \frac{T_0 \tau \lambda_0}{\rho_0 L^2} \quad (2.10)$$

$$c_0 = \frac{u_0}{T_0} \quad (2.11)$$

l'equazione dell'energia adimensionalizzata può essere riscritta

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho_r \tilde{c}_r T + \rho^G S^G u^G + \rho^L (1 - S^G) u^L] + \\ & - \nabla \left[k^G h^G \nabla P^G + k^G \rho^G u^G \mathbf{k} + \frac{\mu^G}{\mu^L} k^L h^L \nabla P^L + k^L \rho^L h^L \mathbf{k} \right] = \\ & = \nabla \left[(\tilde{\lambda}_r + \tilde{\lambda}^G S^G + (1 - S^G) \tilde{\lambda}^L) \nabla T \right] - \tau (S^G u^G \rho^G + (1 - S^G) u^L \rho^L) \psi^{out} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2 Grandezze caratteristiche

Le principale grandezze caratteristiche che abbiamo evidenziato durante l'analisi dimensionale, sono le seguenti

$$P_0 = \rho_0 g L \quad (2.13)$$

$$\tau = \frac{\mu^G L}{g \kappa \rho_0} \quad (2.14)$$

$$u_0 = \frac{T_0 \tau \lambda_0}{\rho_0 L^2} \quad (2.15)$$

$$c_0 = \frac{u_0}{T_0} \quad (2.16)$$

Analizzando queste grandezze, si osserva che la pressione caratteristica è, come ci aspetteremmo, data da una pressione idrostatica di un fluido a densità costante ρ_0 . Essendo acqua, la componente principale del fluido geotermico, si potrebbe scegliere la densità dell'acqua in condizioni standard come valore caratteristico. Per quanto riguarda la lunghezza caratteristica, trattandosi di un modello di bacino, si potrebbe ipotizzare che fosse $L = 1$ Km, la grandezza tipica da coinvolgere. Le celle di simulazione del reservoir saranno infatti, necessariamente, di quell'ordine di grandezza per lato (con variabilità dovuta ad eventuali riduzioni del passo della griglia nelle zone produttive). Anche sulla profondità la grandezza caratteristica potrebbe essere la stessa, dato che il giacimento geotermico si trova tipicamente a profondità di 1000 m, per quanto riguarda i vecchi pozzi, e 3000 m, per quanto riguarda il serbatoio profondo. Con queste scelte, otteniamo che la pressione caratteristica è $P_0 = 1000 \times 9.8 \times 1000 \sim 10^7$ Pa, ovvero, dell'ordine di 100 bar. Questo valore caratteristico è effettivamente ragionevole, considerato che la pressione dei bacini geotermici varia da circa 70 bar, nel caso di Larderello, a circa 200 bar, nel caso del monte Amiata.

La grandezza più sorprendente è data dal tempo caratteristico. Questa grandezza è particolarmente significativa in quanto rappresenta una misura della velocità di rilassamento tipica

del sistema. In questo caso, scegliendo una viscosità del gas $\mu^G \simeq 0.3 \times 10^{-3}$ Ns/m², una permeabilità caratteristica $\kappa \sim 10^{-13}$ m² e i valori precedenti per $L = 1000$ m e $\rho_0 = 1000$ Kg/m³, otteniamo che il tempo caratteristico è $\tau \sim 3 \times 10^8$ s, corrispondente a 30 anni. Questo indica che le trasformazioni dovute al moto del fluido su scala spaziale così grande sono estremamente lente. La velocità tipica è data da $L/\tau \simeq 10^{-5}$ m/s, ovvero 1 cm/giorno. Anche scegliendo una grandezza caratteristica maggiore, questo dato non cambierebbe, essendo $\tau \propto L$. Da questo semplice conto dimensionale, si può trarre una banale considerazione, ovvero che una simulazione al livello di reservoir, per dare risultati misurabili e visibili sulla scala spaziale delle centinaia di metri o dei chilometri, determinata dalla dimensione delle celle di simulazione, deve correre per almeno dieci o venti anni, tempi cioè paragonabili al tempo caratteristico e oltre. Qualunque simulazione su periodi più brevi, data la dimensione delle celle di simulazione, essenzialmente continuerebbe a risentire in maniera troppo diretta della condizione iniziale imposta.

Per quanto riguarda i valori dell'energia specifica, non sorprende il fatto che l'entalpia scali come l'energia interna, come evidenziato dal fatto che una scelta ragionevole per l'entalpia specifica è $h_0 = u_0$. Questo risultato può essere interpretato con il fatto che il lavoro meccanico è trascurabile rispetto all'energia termica del sistema. In altre parole, l'energia geotermica ha un grande valore per la capacità del fluido geotermico di scambiare calore con l'esterno, piuttosto che per la sua capacità di svolgere lavoro meccanico. A riprova di questo, l'Eq. (2.16) indica che u_0 è essenzialmente equivalente alla quantità di calore $c_0 T_0$, mentre c_0 , risente, come è ovvio, del valore tipico della conducibilità termica media λ_0 e delle componenti convettive.

2.3 Il raggio caratteristico di influenza del pozzo

Come già visto nella sezione precedente, la analisi dimensionale può fornire utili informazioni al comportamento del sistema, non solo in termini propedeutici alla preparazione delle simulazioni numeriche, ma anche ad una interpretazione dei risultati ed alla definizione degli scenari di simulazione.

Prendiamo in esame, a partire dalla analisi dimensionale, il raggio di influenza di un pozzo di prelievo. Per farlo, torniamo alla stima del tempo caratteristico, che abbiamo valutato in circa 3×10^8 s. Come abbiamo detto, questa grandezza è indipendente dalla lunghezza caratteristica. Ipotizziamo di voler valutare l'influenza di un pozzo ad una distanza di $L = 30$ Km, cioè ad una distanza paragonabile con l'estensione del bacino stesso. Per questo, definiamo una velocità caratteristica del fluido, data da $v = L/\tau \simeq 10^{-4}$ m/s. La velocità caratteristica che abbiamo definito rappresenta, in buona sostanza, la velocità di un volumetto di fluido che attraversi il bacino in un tempo caratteristico. Questo valore della velocità può essere direttamente confrontata con l'espressione derivante dalla legge di Darcy. Trascurando infatti gli effetti inerziali e ipotizzando un flusso radiale di ricarica intorno al pozzo, si ha che

$$\phi v = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (2.17)$$

Sostituendo i valori caratteristici di permeabilità $\kappa \simeq 10^{-13}$ m², viscosità $\mu \simeq 0.3 \times 10^{-3}$ Ns/m² e porosità $\phi \simeq 10^{-2}$, otteniamo che il gradiente caratteristico di pressione, ad una distanza di 30 Km dal pozzo è $\partial P/\partial r \simeq 10^4$ Pa/m. Ovvero, 0.1 bar/m. Considerato che le pressioni tipiche del bacino sono vicine o superiori ai 100 bar, si ottiene che $\nabla P/P \simeq 10^{-3}$ m⁻¹. Per avere variazioni apprezzabili della pressione tra celle di simulazione contigue, le celle dovrebbero essere pertanto di almeno qualche decina o centinaio di metri di lato. Tuttavia, con celle di dimensione superiore al chilometro, celle contigue avrebbero tra loro differenze di pressione paragonabili al valore della pressione stessa. Le approssimazioni introdotte da una discretizzazione così grossolana darebbero, verosimilmente, risultati poco attendibili. Tuttavia, considerando un bacino di

estensione paragonabile a L su un'area, per semplicità quadrata, e uno spessore in profondità di alcuni chilometri, una griglia a passo regolare di 1 Km, e sei o sette strati in profondità, sarebbe costituita da circa 5000 celle. Anche solo dimezzando il passo delle celle, il numero salirebbe di quattro volte e così via. Ci si accorge quindi molto facilmente come, simulazioni a scala di bacino possano essere poco indicative, specialmente se confrontate con valori puntuali misurati, a meno di simulare modelli su mesh molto grandi e poco gestibili numericamente.

Andiamo ora a valutare il raggio di influenza di un pozzo, ricorrendo ancora alla semplice schematizzazione del bacino a simmetria cilindrica (Fig. (1)) Ipotizziamo quindi che un pozzo che

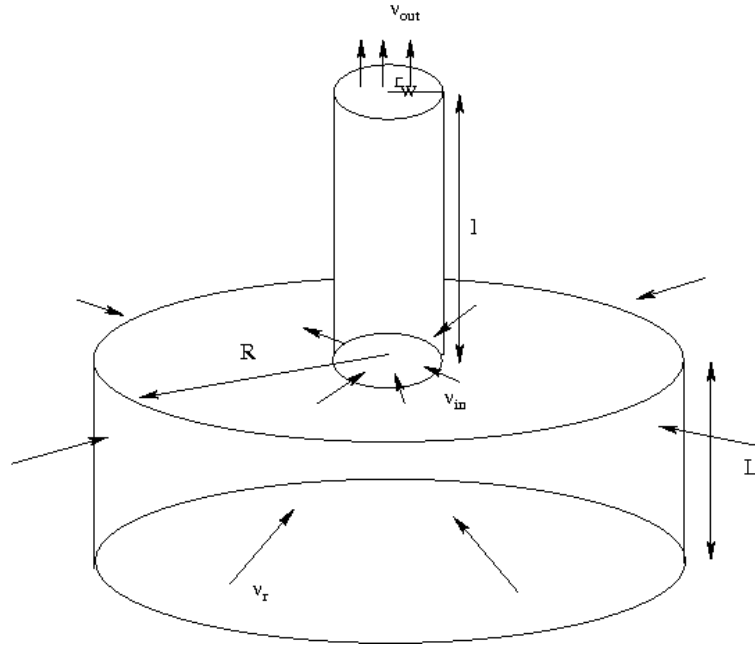


Figura 1: Rappresentazione schematizzata di un pozzo che insiste su un reservoir di forma cilindrica di spessore L e raggio R

scarica fluido a velocità v_{out} , abbia una velocità di feed v_{in} nei dintorni del punto di pescaggio. Chiamiamo v la velocità del fluido a distanza R dal pozzo, che, in buona sostanza, alimenta il pozzo. Per la conservazione della portata totale di fluido, ipotizzando per semplicità che non ci sia transizione di fase lungo il percorso (sebbene gli effetti di una eventuale vaporizzazione siano facilmente stimabili), abbiamo che

$$\rho \pi r_W^2 v_{in} = \rho 2\pi R L v \quad (2.18)$$

e quindi

$$\frac{v}{v_{in}} = \frac{r_W^2}{2RL} \quad (2.19)$$

Ipotizzando che il pozzo abbia un raggio $r_W = 10$ cm e che lo spessore del reservoir sia dell'ordine della decina di metri $L \sim 10$ m, ad una distanza R di un 1 Km, il rapporto tra le velocità di ricarica e il fee del pozzo è $v/v_{in} \sim 10^{-6}$. Già ad una distanza di 1 Km dal pozzo quindi, il fluido è praticamente fermo, rispetto alla velocità di feed. Se anche facessimo l'ipotesi che v_{in} è dell'ordine della velocità del suono, e quindi il flusso è in regime di choking, non solo per quanto riguarda la risalita, ma anche per le zone circostanti il fondo pozzo, otterremmo che $v \sim 0.1 \times 10^{-3}$

m/s. Utilizzando ancora la legge di Darcy per un flusso a simmetria radiale, otterremmo che il gradiente di pressione tipico, ad 1 Km di distanza dal pozzo, risulta $\nabla P \sim 3 \times 10^3$ Pa/m, ovvero dell'ordine di 0.1 – 0.01 bar/m. Ricordando ora che la pressione è tipicamente dell'ordine dei 100 bar, risulta che la componente di flusso dovuto al gradiente di pressione radiale è sì presente, ma già ad 1 Km dal pozzo, molto limitato. In altre parole, già ad 1 Km di distanza dal pozzo, le modifiche ai flussi legate a incrementi (o riduzioni) della portata (e quindi della velocità di prelievo) dei fluidi sono estremamente lente e, sul breve periodo, trascurabili.

Queste valutazioni ci portano a fare ulteriori considerazioni sulla ricarica del pozzo. Nelle ipotesi precedenti, abbiamo supposto che la ricarica sia dovuta tutta ad un flusso radiale verso il pozzo, mentre al bordo superiore, abbiamo essenzialmente ipotizzato che il sistema fosse completamente impermeabile. In altre parole, la ricarica del pozzo viene, in questa ipotesi, da zone molto lontane, attraverso fratture che si estendono orizzontalmente per chilometri. Proviamo ora valutare quale potrebbe essere il contributo di acqua che si infila nel reservoir da zone soprastanti, attraverso rocce a permeabilità inferiore. Per questo, schematizziamo il sistema come in Fig. 2, che si richiama al modello di giacimento “a sifone”, riportato anche in [9]. Supponiamo, in maniera molto semplificata, che il bacino geotermico sia collegato attraverso uno

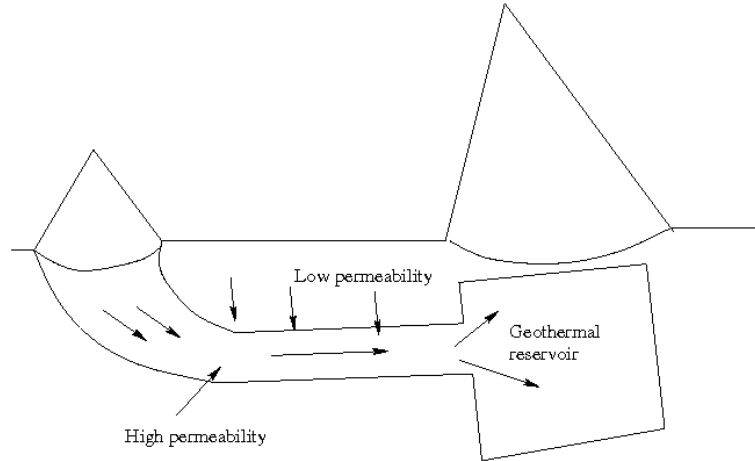
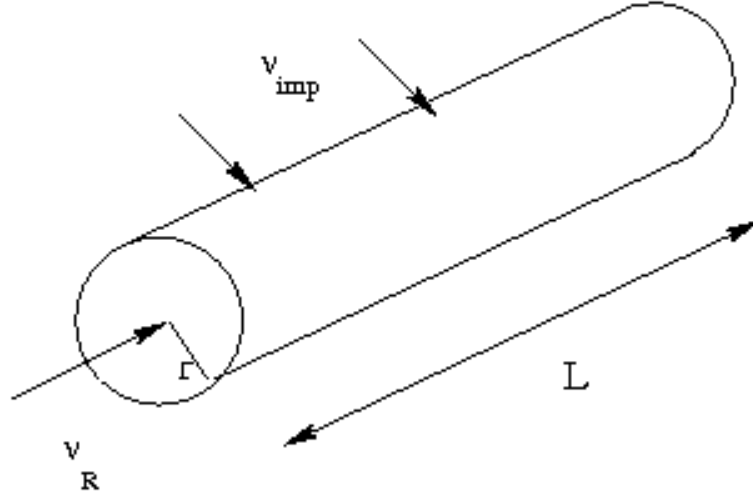


Figura 2: Rappresentazione schematizzata di un sistema geotermico la cui ricarica è dovuta in parte ad un collegamento diretto con affioramenti lontani e in parte ad una ricarica dalle aree superficiali a bassa permeabilità

strato di roccia a bassa permeabilità, con affioramenti posti in zone lontane dall'area produttiva. Tuttavia, la presenza di una permeabilità bassa, ma non nulla, non esclude il contributo di una ricarica da strati superiori, posti nelle vicinanze dell'area produttiva. In questo caso, potremmo, semplificando ulteriormente, rappresentare la ricarica, come se essa avvenisse lungo una condotta cilindrica, con pareti non completamente impermeabili, seppure a bassa permeabilità (Fig. 2.3). Supponiamo che la zona di ricarica lontana sia posta ad una distanza L e che il flusso di massa da questa zona sia $\dot{M}_R = \rho v_R A_R$. Supponiamo inoltre che attraverso la parete della condotta di ricarica, si infiltri una massa d'acqua $\dot{M}_{imp} = \rho v_{imp} A_{imp}$. Utilizzando Darcy, e supponendo che il gradiente di pressione sia più o meno lo stesso, otteniamo quindi che la ricarica totale è data da

$$\dot{M}_{tot} = \frac{\rho \nabla P}{\mu} A_R \kappa_R \left[1 + \frac{A_{imp} \kappa_{imp}}{A_R \kappa_R} \right] \quad (2.20)$$

Dove κ rappresenta la permeabilità dei due tipi di roccia e ϕ i valori di porosità. In questa forma,



è facile osservare che il secondo termine in parentesi conta solo se di ordine paragonabile ad 1, ovvero solo se

$$\frac{\phi_{imp}}{\phi_R} \frac{\kappa_{imp}}{\kappa_R} \frac{\pi r L}{\pi r^2} \sim 1 \quad (2.21)$$

In altre parole, se chiamiamo $c_\phi = \phi_{imp}/\phi_R$ e $c_\kappa = \kappa_{imp}/\kappa_R$, si deve avere che

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{c_\kappa} \quad (2.22)$$

Se facciamo ora l'ipotesi che $c_\kappa \sim 10^{-4}$, si ottiene che, per avere un contributo apprezzabile della ricarica, L/R deve essere almeno 10^4 . In altre parole, il contributo della ricarica laterale è certamente trascurabile in tutti i casi realistici. Le cose, ovviamente, cambiano completamente aspetto se la differenza delle permeabilità non è così marcata e, ad esempio, le porosità hanno ordini di grandezza simili.

Per rendere il ragionamento un po' più realistico, facciamo ora l'ipotesi che la differenza di pressione, e non il gradiente, tra le due zone di ricarica e la zona di produzione sia la stessa. Facciamo inoltre l'ipotesi che L sia nota. In questo caso, la ricarica totale sarebbe

$$\dot{M}_{tot} = \frac{\rho}{\mu} \kappa_R A_R \nabla P_R \left[1 + c_\kappa \frac{A_{imp}}{A_R} \frac{\nabla P_{imp}}{\nabla P_R} \right] \quad (2.23)$$

Questa volta, affinché il contributo di ricarica dall'alto sia non trascurabile, si deve avere

$$\frac{L}{R} \frac{\nabla P_{imp}}{\nabla P_R} \sim \frac{1}{c_\kappa} \quad (2.24)$$

Assumendo valori simili delle differenze di pressione ed un andamento quasi lineare della pressione, abbiamo che $\nabla P_R = \Delta P/L$ e $\nabla P_{imp} = \Delta P/R$. Quindi $\nabla P_{imp}/\nabla P_R = L/R$. In altre parole, affinché la ricarica laterale dia un contributo non trascurabile, deve essere

$$c_\kappa \sim \frac{1}{\left(\frac{L}{R}\right)^2} \quad (2.25)$$

Nell'ipotesi che, ad esempio $L/R \sim 100$, il contributo di ricarica dall'alto diventa non trascurabile se il rapporto tra la permeabilità dello strato superiore e quella della fascia di ricarica è almeno

di ordine 10^{-4} . Ad esempio, se la fascia di ricarica ha una permeabilità equivalente alle zone produttive 10^{-13} o 10^{-14} m² la permeabilità degli strati superiori deve essere almeno 10^{-18} m². Questo valore, tuttavia, non è completamente sballato. Le zone non produttive infatti, si caratterizzano proprio per permeabilità di questo ordine di grandezza.

Questo risultato è piuttosto significativo. La conclusione che se ne ricava è che una ipotetica ricarica lontana con cui il bacino è direttamente collegato da una fascia di rocce fratturate o ad alta permeabilità, risulta effettivamente dominante rispetto ad una ricarica locale a bassa efficienza, solo se la permeabilità di quest'ultima è almeno 10^5 volte più bassa della fascia di collegamento con la ricarica lontana. Tuttavia, se la permeabilità degli strati superiori è dell'ordine di 10^{-18} m² o superiore, questo contributo diventa dello stesso ordine di grandezza dell'altro. L'isolamento del bacino geotermico rispetto agli strati superficiali in zone vicine deve essere quindi caratterizzato da un salto di permeabilità molto marcato. In tutti gli altri casi, non si può escludere una ricarica di zone relativamente vicine alla giacimento.

3 Scaling nel caso non lineare

Quando gli effetti inerziali cominciano ad essere apprezzabili nel flusso attraverso un mezzo poroso, la legge di Darcy non consente più di descrivere il bilancio del momento lineare del fluido. Quando le forze viscosive sono predominanti la relazione fra la velocità \vec{v}^α e il gradiente idraulico è lineare e il flusso è ben descritto dalla legge di Darcy, mentre quando gli effetti inerziali sono predominanti si osserva uno scostamento dalla relazione lineare che alla fine conduce alla turbolenza.

Per quantificare l'effetto dovuto alle forze inerziali, analogamente al caso del flusso in condotta, si definisce il numero di Reynolds per i mezzi porosi

$$Re = \frac{\rho^* v^* d^*}{\mu^*}, \quad (3.1)$$

dove v^* è la velocità superficiale, ρ^* è la densità, μ^* è la viscosità e d^* è la lunghezza caratteristica dei grani che costituiscono la matrice solida del mezzo poroso. Solitamente d^* è espresso in funzione della permeabilità del mezzo, ossia $d = \Gamma(k)$. Dalla letteratura sperimentale sappiamo che esistono varie correlazioni empiriche per la funzione $\Gamma(k)$ e che, in generale, è universalmente accettato che la dimensione media dei grani che compongono la matrice del mezzo poroso sia una variabile fondamentale per la determinazione della permeabilità (vedi [19]). La correlazione più nota è sicuramente

$$k = c d^{*2}, \quad (3.2)$$

dove c è una costante che tiene conto di proprietà come la forma dei grani, le loro proprietà meccaniche e la porosità. Collins [7] suggerisce di considerare $c = \phi$ (cioè la porosità), mentre Ward [25] assume semplicemente $c = 1$. Il lavoro [19] costituisce un'ottimo "review" sull'argomento.

Sebbene ci sia accordo in letteratura sul fatto che la legge di Darcy valga nel caso in cui le forze inerziali siano trascurabili, non risulta chiaro quale sia il valore del numero di Reynolds per cui si osserva la transizione da flusso darciano a flusso non-darciano. Il primo tentativo di determinare sperimentalmente questo valore lo possiamo trovare in [6], dove viene dimostrato che il regime non lineare si instaura per $Re \approx 10 - 1000$ per mezzi porosi non compattati e $Re \approx 1 - 5$ in rocce compattate. In [10] viene presentata una versione modificata di (3.1)

$$Re = \frac{\rho^* u^* d^*}{\mu^*} \frac{1}{1 - \phi}, \quad (3.3)$$

dove u^* rappresenta la velocità del fluido nei pori. Quando Re è dato dalla (3.3), la transizione avviene per $Re \approx 3 - 10$. Sono molti i lavori sperimentali che cercano di stabilire un limite di validità per la legge di Darcy e spesso non in accordo fra di loro. In [2]), per esempio, gli autori suggeriscono che nel caso di flusso in mezzi eterogenei la legge di Darcy debba essere rivista anche nel caso di velocità molto limitate. Per una panoramica sulla importanza degli effetti non-darciani in varie applicazioni ingegneristiche e geologiche rimandiamo a [1], [13], [16], [26].

Per cercare di ottenere una procedura che ci consenta di stabilire quando un flusso è darciano e quando no partiamo dalla relazione di Forchheimer in un contesto generale tridimensionale

$$\frac{\mu^\alpha}{k k_r^\alpha} \vec{v}^\alpha + \rho^\alpha \beta \vec{v}^\alpha |\vec{v}^\alpha| = -\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{g}, \quad (3.4)$$

dove μ^α è la viscosità, ρ^α la densità, k_r^α è la permeabilità relativa, k è la permeabilità assoluta, β è un parametro con le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, P^α è la pressione nella fase α e \vec{g} rappresenta la risultante delle forze esterne (ad esempio quella gravitazionale). Nel caso in cui $\beta = 0$ la (3.4) si riduce esattamente all'equazione costitutiva di Darcy. La relazione (3.4) può essere utilizzata per esprimere il flusso di massa $\rho^\alpha \vec{v}^\alpha$ in funzione di ∇P^α , ρ^α , \vec{g} , $k_r^\alpha(S^\alpha)$ dei parametri fisici k , μ^α , β . Dalla (3.4) si ha infatti

$$\vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{g}}{\frac{\mu^\alpha}{k k_r^\alpha} + \rho^\alpha \beta |\vec{v}^\alpha|}, \quad (3.5)$$

per cui

$$|\vec{v}^\alpha| = \frac{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}|}{\frac{\mu^\alpha}{k k_r^\alpha} + \rho^\alpha \beta |\vec{v}^\alpha|}. \quad (3.6)$$

Il modulo della velocità $|\vec{v}^\alpha|$ è dunque la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado

$$\rho^\alpha \beta |\vec{v}^\alpha|^2 + \frac{\mu^\alpha}{k k_r^\alpha} |\vec{v}^\alpha| - |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}| = 0. \quad (3.7)$$

Da semplici calcoli si ottiene

$$\rho^\alpha \beta |\vec{v}^\alpha| = -\frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha}\right)^2 + \rho^\alpha \beta |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}|}. \quad (3.8)$$

Se adesso sostituiamo la (3.8) nella (3.5) si ottiene

$$\vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{g}}{\frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha} + \sqrt{\left(\frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha}\right)^2 + \rho^\alpha \beta |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}|}}. \quad (3.9)$$

Quindi il flusso di massa della fase α è dato da

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{g}}{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}|} \left[\sqrt{\left(\frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha}\right)^2 + \rho^\alpha \beta |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{g}|} - \frac{\mu^\alpha}{2k k_r^\alpha} \right] \frac{1}{\beta}. \quad (3.10)$$

A questo punto riscaliemo le variabili

$$\rho^\alpha = \rho^* \tilde{\rho}^\alpha, \quad \vec{v}^\alpha = v^* \tilde{v}^\alpha, \quad P^\alpha = P^* \tilde{P}^\alpha, \quad \mu^\alpha = \mu^* \tilde{\mu}^\alpha, \quad (3.11)$$

$$t = t^* \tilde{t}, \quad \vec{x} = L^* \vec{x}, \quad \vec{g} = g \vec{i}_g, \quad (3.12)$$

dove abbiamo posto

$$g = |\vec{g}|, \quad \vec{i}_g = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = \text{vers} \vec{g} \quad (3.13)$$

L'equazione (3.10) diventa (omettiamo le tilda per semplicità)

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \left(\frac{\rho^* L^* g}{P^*} \right) \rho^\alpha \vec{i}_g}{\left| \nabla P^\alpha - \left(\frac{\rho^* L^* g}{P^*} \right) \rho^\alpha \vec{i}_g \right|} \left(\frac{\mu^*}{2\beta k \rho^* v^*} \right) \cdot \left[\sqrt{\left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{4\beta k^2 \rho^* P^*}{\mu^{*2} L^*} \right) \rho^\alpha \left| \nabla P^\alpha - \left(\frac{\rho^* L^* g}{P^*} \right) \rho^\alpha \vec{i}_g \right|} - \left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right) \right]. \quad (3.14)$$

La scelta naturale per i valori caratteristici sembra dunque essere

$$\left(\frac{\rho^* L^* g}{P^*} \right) = 1, \quad \left(\frac{\mu^*}{2\beta k \rho^* v^*} \right) = 1, \quad (3.15)$$

in modo tale che

$$L^* = \left(\frac{P^*}{\rho^* g} \right), \quad v^* = \left(\frac{\mu^*}{2\beta k \rho^*} \right). \quad (3.16)$$

Notiamo che con una tale scelta dei valori caratteristici, la lunghezza e la velocità caratteristica dipendono solo dalle proprietà termodinamiche e reologiche del fluido (come ci si aspetta). Il tempo caratteristico è dato da

$$t^* = \frac{L^*}{v^*}, \quad \implies \quad t^* = \frac{2\beta k P^*}{g \mu^*}. \quad (3.17)$$

Notiamo inoltre che il coefficiente che appare nella radice quadrata in (3.14)

$$\Theta =: \left(\frac{4\beta k^2 \rho^* P^*}{\mu^{*2} L^*} \right) = \left(\frac{4\beta k^2 \rho^{*2} g}{\mu^{*2}} \right) = \left(\frac{g}{\beta v^{*2}} \right). \quad (3.18)$$

Dalla definizione di Re data nella (3.1) possiamo derivare l'ordine di grandezza del parametro di Forchheimer β . Dalla (3.1) e dalla (3.16) si ottiene

$$Re = \frac{\rho^* v^* d^*}{\mu^*} = \frac{\rho^* d^* \mu^*}{2\beta k \rho^* \mu^*} = \frac{\Gamma(k)}{2\beta k}, \quad (3.19)$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $d^* = \Gamma(k)$. Perciò

$$\beta = \frac{\Gamma(k)}{2Rek}, \quad (3.20)$$

ossia β dipende solamente dalla velocità del fluido e dalla geometria del sistema. Nel “range” di validità dell'equazione costitutiva di Forchheimer l'ordine di grandezza di β è dato dalla (3.20) e dipende dal regime di flusso (attraverso Re) e dalle proprietà geometriche del sistema (attraverso $\Gamma(k)$). Per mezzo della (3.15) e della (3.18) l'equazione (3.14) diventa

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g}{\left| \nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g \right|} \left[\sqrt{\left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{g}{\beta v^{*2}} \right) \rho^\alpha \left| \nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g \right|} - \left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Osservazione 3.1 L'equazione (3.21) è la versione adimensionalizzata dell'equazione di bilancio del momento. Proviamo a determinare velocità, tempo e lunghezza caratteristici utilizzando tipici parametri di campo, come

k	10^{-13}	m^2
μ^*	$0.5 \cdot 10^{-5}$	$pa \cdot s$
ρ^*	733	Kg/m^3
P^*	10^7	Pa
β	10^8	m^{-1}
g	9.8	m/s^2

Con questi valori si ottiene

$$v^* = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ m/s} \implies v^* = 2.9 \cdot 10^3 \text{ cm/gg.} \quad (3.22)$$

$$L^* = 1.3 \text{ Km}, \quad t^* = L^*/v^* \approx 43 \text{ gg.} \quad (3.23)$$

Notiamo inoltre che

$$\Theta = \left(\frac{g}{\beta v^{*2}} \right) = 0.84, \quad Re = 4, \quad d^* = 8 \cdot 10^{-5} \text{ m}, \quad (3.24)$$

dove Re è stato calcolato utilizzando la (3.19) e dove d^* è stato determinato mediante i grafici empirici di [19].

Quando il parametro Θ risulta sufficientemente piccolo possiamo considerare lo sviluppo di

$$\left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{\Theta \rho^\alpha k_r^{\alpha^2}}{\mu^{\alpha^2}} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} - 1 \right] \quad (3.25)$$

attorno al valore $\Theta = 0$. In altre parole, invece che considerare il termine non lineare nella parentesi quadra in (3.21), prendiamo la sua espansione attorno a $\Theta = 0$ (sviluppo di McLaurin) in modo da ottenere una forma polinomiale per il flusso di massa. Ricordiamo che

$$\sqrt{1+x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{x}{4} \right)^n \quad (3.26)$$

per $|x| < 1$. A causa dell'adimensionalizzazione

$$\frac{\rho^\alpha}{\mu^{\alpha^2}} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g| = O(1), \quad (3.27)$$

cosicché, dal momento che $k_r^\alpha \in [0, 1]$, l'espansione asintotica può essere fatta se Θ è sufficientemente più piccolo di 1. In questo caso il flusso di massa diventa

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g}{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} \left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta \rho^\alpha k_r^{\alpha^2}}{4\mu^{\alpha^2}} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g| \right)^n \right], \quad (3.28)$$

o equivalentemente

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g}{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta \rho^\alpha}{4} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g| \right)^n \left(\frac{k_r^\alpha}{\mu^\alpha} \right)^{2n-1} \right]. \quad (3.29)$$

Osservazione 3.2 Notiamo che limitandosi all'approssimazione lineare (ossia considerando solo $n = 1$) si ottiene il modello darciano. Infatti limitandosi al termine con $n = 1$ si ha

$$\rho^\alpha \vec{v}^\alpha = [-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g] \left(\frac{k_r^\alpha \rho^\alpha \Theta}{2\mu^\alpha} \right). \quad (3.30)$$

che è l'equazione adimensionale di Darcy. Tornando per un istante alle variabili dimensionali è facile osservare che la relazione sopra diventa

$$\frac{\rho^\alpha \mu^\alpha}{k k_r^\alpha} \vec{v}^\alpha = [-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{g}] \rho^\alpha, \quad (3.31)$$

ossia la legge di Darcy.

Definiamo il flusso di massa nonlineare di Forchheimer introdotto in (3.21) come

$$\vec{J}_F = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g}{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} \left(\frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \right) \left[\sqrt{1 + \frac{\Theta \rho^\alpha k_r^{\alpha^2}}{\mu^{\alpha^2}} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} - 1 \right] \quad (3.32)$$

Al posto dello sviluppo completo (3.28) o (3.29), possiamo limitarci all'approssimazione di grado M

$$\vec{J}_F^M = \frac{-\nabla P^\alpha + \rho^\alpha \vec{i}_g}{|\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} \left[\sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta \rho^\alpha}{4} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g| \right)^n \left(\frac{k_r^\alpha}{\mu^\alpha} \right)^{2n-1} \right]. \quad (3.33)$$

L'errore compiuto a seguito di questa approssimazione si può valutare introducendo il parametro

$$\epsilon_M = |\vec{J}_F - \vec{J}_F^M| = \frac{\mu^\alpha}{k_r^\alpha} \left| \left[\sqrt{1 + \frac{\Theta \rho^\alpha k_r^{\alpha^2}}{\mu^{\alpha^2}} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g|} - 1 + \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta \rho^\alpha}{4} |\nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g| \right)^n \left(\frac{k_r^\alpha}{\mu^\alpha} \right)^{2n} \right] \right|, \quad (3.34)$$

ossia il modulo della differenza del flusso di Forchheimer con quello approssimato al grado M . A questo punto è importante notare che l'approssimazione di grado M , e quindi ϵ_M , possono essere calcolati per ogni Θ (e quindi anche per $\Theta > 1$), con l'espressione (3.34) che continua a fornire l'ordine di grandezza dell'errore commesso¹. Dalla (3.27)

$$O(\epsilon_M) = \frac{1}{k_r^\alpha} \left| \sqrt{1 + \Theta k_r^{\alpha^2}} - 1 - \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta}{4} \right)^n (k_r^\alpha)^{2n} \right| \quad (3.35)$$

Quindi $O(\epsilon_M) =: F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ è una funzione di Θ e k_r^α (vedi Fig. 3-6). È facile osservare che

$$\lim_{k_r^\alpha \rightarrow 0} F_M(\Theta, k_r^\alpha) = 0, \quad \forall \Theta \geq 0. \quad (3.36)$$

ossia che quando la fase α è piccola i due flussi di massa coincidono. Quando $\Theta \leq 1$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F_M(\Theta, k_r^\alpha) = 0, \quad \forall k_r^\alpha \in [0, 1], \quad (3.37)$$

¹La richiesta $\Theta \leq 1$ è necessaria solamente se vogliamo rimpiazzare il termine in parentesi quadra di (3.32) con la sua espansione di Taylor.

e l'ordine di grandezza $O(\epsilon_M)$ può essere reso arbitrariamente piccolo prendendo M sufficientemente grande. In particolare, per $\Theta \leq 1$ (vedi Fig. 3-4), si ha

$$\sup_{k_r^\alpha \in [0,1]} F_M(\Theta, k_r^\alpha) = F(\Theta, 1). \quad (3.38)$$

Perciò, per avere un'idea dell'errore introdotto prendendo l'approssimazione di grado M con $\Theta \leq 1$, al posto del modello non lineare completo, si può valutare il numero

$$E_M = \left| \sqrt{1 + \Theta} - 1 - \sum_{n=1}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta}{4} \right)^n \right|, \quad (3.39)$$

che rappresenta il sup dell'ordine di grandezza dell'errore compiuto con l'approssimazione di grado M . Una volta scelto il giusto grado per l'approssimazione, possiamo anche stimare la differenza fra il modello darciano e quello non darciano approssimato. Infatti, considerando il modulo di $\bar{J}_F^M - \bar{J}_F^1$ (si noti che \bar{J}_F^1 è il flusso di massa nel regime darciano), si ottiene

$$\delta_M = |\bar{J}_F^M - \bar{J}_F^1| = \left| \sum_{n=2}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta \rho^\alpha}{4} \left| \nabla P^\alpha - \rho^\alpha \vec{i}_g \right| \right)^n \left(\frac{k_r^\alpha}{\mu^\alpha} \right)^{2n-1} \right|. \quad (3.40)$$

Per mezzo della (3.27) si ha

$$O(\delta_M) = \left| \sum_{n=2}^M \frac{(-1)^{n+1} 2(2n-2)!}{n!(n-1)!} \left(\frac{\Theta}{4} \right)^n (k_r^\alpha)^{2n-1} \right| =: G_M(\Theta, k_r^\alpha). \quad (3.41)$$

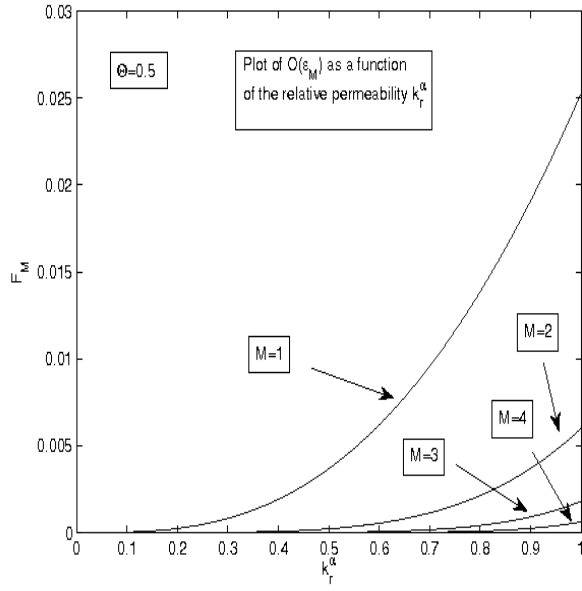
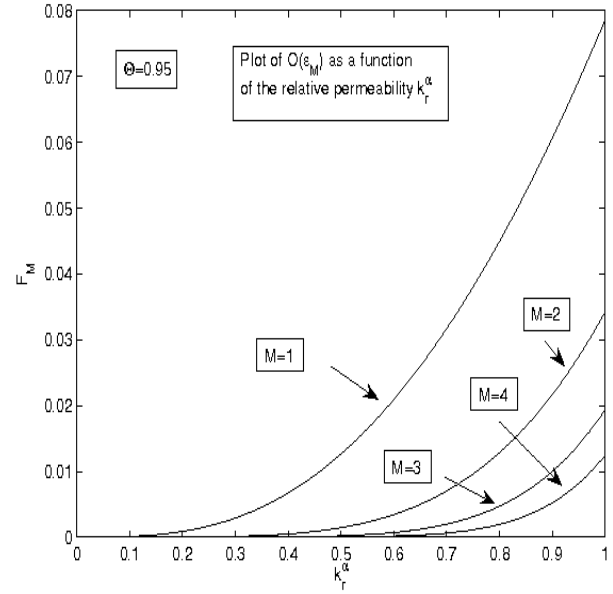
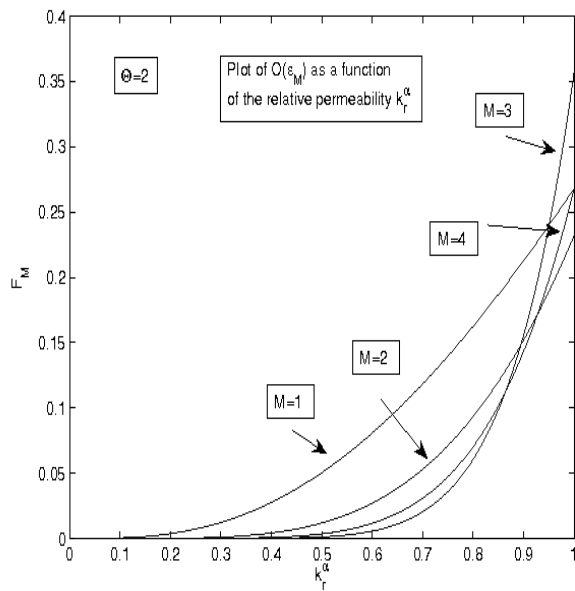
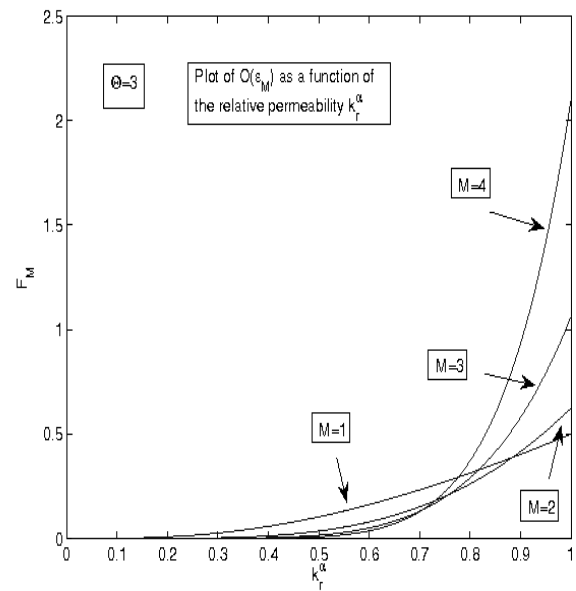
In questo caso δ_M quantifica la divergenza del modello approssimato di Forchheimer da quello di Darcy. Come osservato per la (3.34), anche in questo caso il parametro Θ può (in principio) essere più grande di 1. Per avere un'idea dell'andamento delle funzioni $F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ e $G_M(\Theta, k_r^\alpha)$, fissiamo Θ e “plottiamo” queste funzioni per $k_r^\alpha \in [0, 1]$ and $M = 1, 2, 3, 4, 5$ (vedi 3-10).

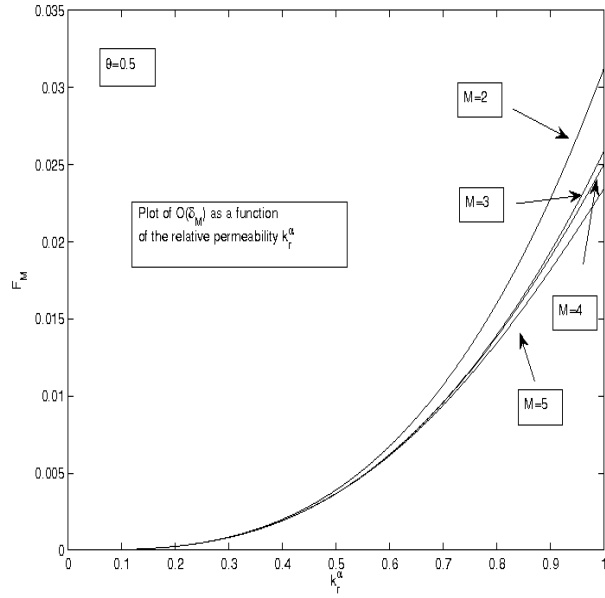
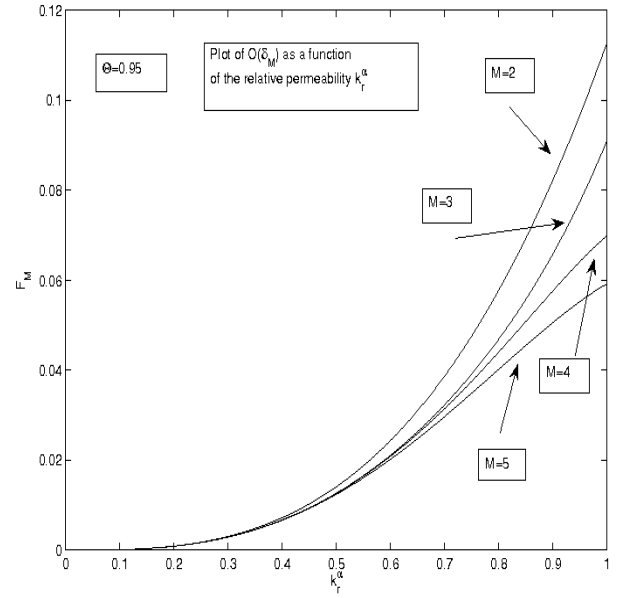
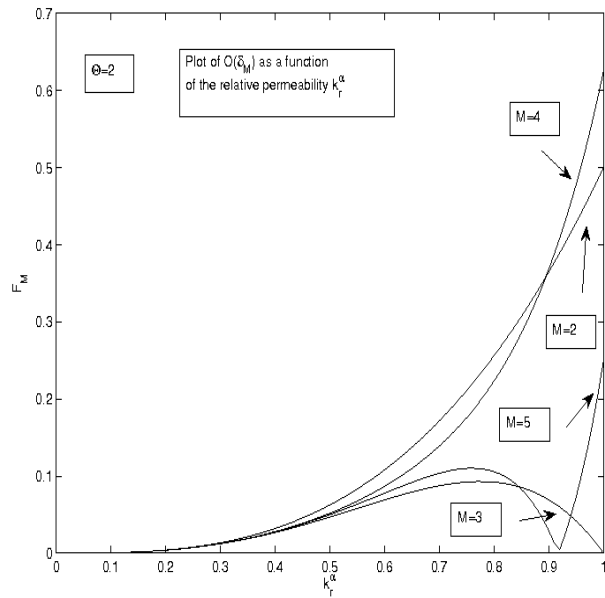
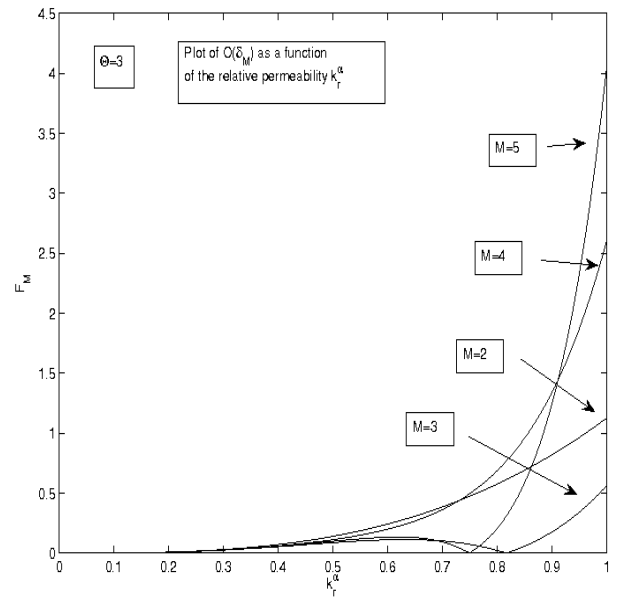
Notiamo che per $\Theta > 1$ l'errore commesso con l'approssimazione di grado M può diventare molto grande (fino al 50% e più) specialmente per valori di k_r^α vicini a 1. In questo caso l'approssimazione polinomiale non sembra raccomandabile (come è naturale attendersi).

4 Un modello di flusso non-Darciano e multifase nella regione di bacino in prossimità del pozzo

Nella modellazione di un bacino geotermico un'importante aspetto riguarda il collegamento fra il modello dell'intero bacino (c.d. modello *full field*) e la descrizione dei processi che avvengono nelle zone vicino ai pozzi. In effetti, il problema matematico che deriva dalla descrizione dei bilanci di massa e di energia può essere risolto suddividendo il sistema in tre sotto-domini: il bacino completo, vero e proprio, la zona di estrazione vicino al pozzo e la regione interna al pozzo stesso. Ovviamente, tale suddivisione va pensata per tutti i pozzi presenti nel sistema. Il problema completo pertanto può essere letto come l'accoppiamento di questi singoli problemi (si veda [9, 11], ad esempio).

Quando questo approccio di risoluzione viene tradotto in termini di codice di simulazione possono crearsi alcune difficoltà non indifferenti. Infatti, la descrizione dei processi che avvengono vicino ai pozzi richiede una discretizzazione del dominio che sia notevolmente più fine di quella adottata nella regione non estrattiva (cfr. [14]). Tuttavia, un affinamento della discretizzazione

Figura 3: Plot of $F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 0.5$.Figura 4: Plot of $F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 0.95$.Figura 5: Plot of $F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 2$.Figura 6: Plot of $F_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 3$.

Figura 7: Plot of $G_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 0.5$.Figura 8: Plot of $G_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 0.95$.Figura 9: Plot of $G_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 2$.Figura 10: Plot of $G_M(\Theta, k_r^\alpha)$ for $\Theta = 3$.

può essere non esaustivo, o addirittura non possibile, a causa della conseguente crescita dei costi computazionali. Per far fronte a ciò occorre definire un modello di estrazione maggiormente accurato. Questa operazione è nota in letteratura come la risoluzione del *deliverability problem*. In altre parole si cerca di prescrivere un flusso di estrazione nel bacino che sia collegato in modo coerente a quello misurato a testa pozzo. Tale definizione passa dall'individuazione del cosiddetto *volume di influenza*, cioè il volume rispetto al quale il dato di estrazione a testa pozzo deve essere "pesato". Per risolvere questo problema, l'approccio comunemente utilizzato consiste nella scrittura dell'equazione bilancio con un termine di estrazione che sia proporzionale alla differenza fra la pressione nella cella di discretizzazione che contiene il pozzo e la pressione di fondo pozzo. Nel caso di fluido incomprimibile e ad una sola fase (anche nel caso si una miscela di fluidi non miscibili), la risoluzione di questo problema è piuttosto semplice, e comunque ben nota ed utilizzata in letteratura. In particolare, in caso di fluido mono-componente è possibile ricavare una relazione esplicita che lega in modo proporzionale il termine di sorgente con la differenza fra pressione nella cella e pressione a fondo pozzo. Il coefficiente di proporzionalità è noto come *productivity index* (si veda più avanti) e dipende sia dai parametri petrofisici che dalle caratteristiche geometriche del pozzo.

Per una completa trattazione di questo caso più semplice, è possibile consultare [11, 27, 18, 17] o anche [5], Cap. 13. Nel paragrafo successivo daremo comunque un accenno su questo aspetto. Qualora si abbia a che fare con fluidi comprimibili e cambiamento di fase, il problema diviene assai più complesso. Una delle maggiori complicazioni risiede nel fatto che all'interno della cella di discretizzazione il fluido potrebbe cambiare di fase e quindi, prima di tutto, occorre stimare la distanza radiale dal pozzo della zona a cui avviene il cambiamento di fase.

Nella ricerca portata avanti all'interno del progetto, questo problema è stato affrontato e risolto, inserendo anche la possibilità di flussi non-Darciani. La soluzione del problema è stata tradotta in un algoritmo numerico, inizialmente implementato come un programma *MATLAB*, e successivamente tradotto in un modulo *Fortran90*.

Passiamo adesso a definire più in dettaglio il problema affrontato e a spiegare la struttura dell'algoritmo numerico implementato. Il lavoro di ricerca è poi stato riassunto e documentato in un articolo scientifico², proposto per la pubblicazione alla rivista *Computers & Geosciences*, al quale rimandiamo per la spiegazione dei dettagli tecnici del modello.

4.1 La definizione del problema

Il cosiddetto *deliverability problem* consiste nella definizione di una relazione fra la pressione e a fondo pozzo e il termine di sorgente dell'equazione di bilancio di massa. Tale equazione, nel caso di fluido mono componente e bi-fase risulta essere

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \mathbf{u}^{\alpha} \right) = -Q, \quad (4.1)$$

dove:

- $\alpha = l, g$ è l'indice della fase, l = liquido, g = gas.
- ϕ è la porosità.
- $\rho = \sum_{\alpha} \rho^{\alpha} S^{\alpha}$ è la cosiddetta *parent density*, con S^{α} saturazione della fase α .

²I. Borsi, L. Fusi, F. Rosso, A. Speranza, A well deliverability model for multi-phase non-Darcian flow in geothermal reservoirs, inviato a *Computers & Geosciences*

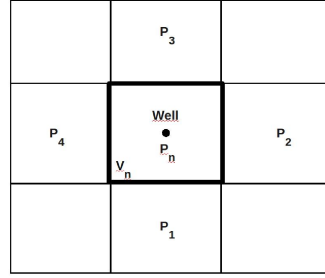


Figura 11: Uno schema della griglia di simulazione nelle vicinanze di un pozzo

- \mathbf{u}^α è la *velocità superficiale* della fase α .
- Q è il termine di sorgente/pozzo che tiene conto della velocità con cui la massa viene acquisita/perduta dal sistema, per unità di volume, $[Q] = ML^{-3}T^{-1}$.

Lo scopo del modello è quello di esplicitare Q in termini della pressione di fondo pozzo e delle altre incognite dell'equazione (4.1).

In particolare, possiamo considerare la parte di griglia di simulazione nell'intorno di un pozzo, schematizzata in Fig.11. In generale, l'eq. (4.1) deve essere integrata rispetto al volume della singola cella³. Pertanto, riferendosi alla n -th cella, il cui volume indichiamo con V_n , si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} (\rho\phi) dV_n + \int_{V_n} \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \mathbf{u}^{\alpha} \right) dV_n = - \int_{V_n} Q dV_n. \quad (4.2)$$

Sia $w_n = Q \int_{V_n} dV_n$ il flusso di massa che esce dalla cella V_n , $[w_n] = MT^{-1}$ e assumiamo di conoscere i seguenti parametri:

- P_b , la *pressione a fondo pozzo*⁴.
- r_w , il raggio del pozzo.

Come abbiamo detto sopra, il nostro scopo è trovare un'espressione coerente per esprimere il termine w_n . Nel fare ciò, ipotizzeremo:

- (A.1) una condizione stazionari nella regione vicino al pozzo.
- (A.2) la possibilità di approssimare tale regione come un cilindro che circonda il pozzo, la cui altezza indichiamo con H . Ciò permette di risolvere il problema sfruttando la simmetria cilindrica.
- (A.3) Il flusso all'interno del cilindro è solo orizzontale, poiché lo spessore H è supposto essere molto minore della profondità del bacino. Pertanto, il problema si riduce ad una formulazione 1-D, dove la sola coordinata spaziale considerata è quella radiale.

³In particolare nell'affrontare questo problema ci riferiamo al metodo di discretizzazione *ai volumi finiti*, adottato da molti codici fra i quali quelli della famiglia *Tough family*, cfr [18]. In ogni caso, questa è solo una nostra particolare scelta al fine di esporre il problema, mentre i risultati che anremo a trovare saranno validi anche in caso di differenti tipi di discretizzazione.

⁴Sulla determinazione di questa pressione, si veda il lavoro svolto all'interno del progetto dedicato a questo aspetto e descritto nel relativo paragrafo di questo rapporto.

Nel caso mono-componente e mono-fase si ottiene la seguente legge:

$$w_n = \frac{\rho}{\mu} \left[\frac{2\pi k H}{\log(r_e/r_w)} \right] (P_n - P_b), \quad (4.3)$$

dove k e μ sono la permeabilità del mezzo e la viscosità del fluido, rispettivamente, e dove

$$r_e = H \exp(-\pi/2), \quad (4.4)$$

è il cosiddetto *raggio equivalente*. La quantità

$$PI = \left[\frac{2\pi k H}{\log(r_e/r_w)} \right]$$

è nota come *productivity index*, ed è una grandezza caratteristica del pozzo e del mezzo in cui esso si trova (cioè tale quantità non dipende dal regime di flusso che stiamo considerando). Come già accennato in precedenza, tale soluzione è ben nota in letteratura (ad esempio è descritta in [5], cap. 13), e pertanto non ne riportiamo i dettagli.

Il caso da noi considerato, invece, assume le seguenti condizioni:

- Fluido multi-fase, con possibile cambiamento di fase in una zona che può essere già compresa all'interno della cella (cioè ad una distanza più piccola di quella intercettabile dalla discretizzazione numerica).
- Possibilità di flusso non-Darciano (dovuto alla turbolenza che si crea nelle vicinanze del pozzo, dove i regimi di flusso sono spesso molto più consistenti che nel resto del dominio).

Dopo aver scritto i problemi per il campo di pressione nella fase gas e liquida, separatamente, possiamo stimare la distanza della zona a cui l'eventuale cambio di fase può avvenire. Tuttavia, non è possibile trovare una espressione esplicita del raggio $r = r^*$ al quale avviene il cambiamento di fase. Esso infatti risulta essere la soluzione della seguente equazione implicita:

$$P_{sat}^2 - P_b^2 = a w_n \log\left(\frac{r^*}{r_w}\right) + b w_n^2 \left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r^*}\right), \quad (4.5)$$

dove a e b sono delle costanti, e che può essere risolta numericamente.

Una volta trovata la stima di questa quantità, abbiamo analizzato il vero e proprio *deliverability problem*, che nel nostro caso porta alla scrittura della seguente relazione

$$4\rho(P_1)(P_1 - P_n) = \frac{w_n}{H} \sqrt{\left(\frac{\mu}{k}\right)^2 - \left(\frac{\beta w_n}{2Hh}\right)^2}. \quad (4.6)$$

dove h è il passo della cella di discretizzazione e la costante β è il cosiddetto *coefficiente di Forchheimer*, $[\beta] = L^{-1}$, che tiene conto del regime non completamente laminare del flusso.

Abbiamo chiamato l'equazione (4.6), ***deliverability equation***: essa ovviamente è valida solo se il seguente vincolo è soddisfatto:

$$0 < w_n < 2 \frac{hH}{\beta} \frac{\mu}{k}. \quad (4.7)$$

Sulla risoluzione numerica di queste espressioni (per ricavare le quali occorrono una serie di passaggi e definizioni che sono descritte nel lavoro citato e in corso di pubblicazione) si basa il codice numerico che abbiamo definito, e che descriviamo nel paragrafo seguente.

4.2 L'algoritmo numerico e il relativo codice DNDmultiphase

Il codice è stato chiamato **DNDmultiphase**, stante per *Deliverability in case of Non-Darcian multiphase flow* ed è pensato per essere utilizzato come un modulo o subroutine richiamato dal codice che risolve il problema su scala full-field, ogni qualvolta si incontra una cella di discretizzazione che contenga un pozzo. Ciò significa che per il codice la pressione all'interno della cella P_n è considerata come un dato input. In altre parole, il codice può essere letto come una funzione numerica

$$w_n = F(P_n, P_b, h, \text{args}),$$

dove con **args** si intende un vettore (o *array*) che contiene tutte le costanti del modello necessarie. Notiamo che la determinazione del valore di F (cioè il calcolo di w_n) è basata su un processo numerico iterativo che ricerca la soluzione dell'equazione (4.6).

Ti seguenti passi vengono iterati sin quando la convergenza non sia raggiunta:

- (a) Parte da un valore tentativo di w_n , detto w_j , e stima r_j^* , risolvendo l'equazione implicita (4.5).
- (b) Calcola la soluzione globale del problema per la pressione (e quindi il valore di P_1), sulla base della risposta avuta nello step (a).
- (c) Controlla che il valore calcolato soddisfi l'equazione (4.6). Se sì, allora $w_n = w_j$. Altrimenti, torna al passo (a) selezionando un nuovo valore tentativo w_{j+1} .

Il primo valore tentativo w_n (chiamiamolo w_D) è quello corrispondente alla soluzione del problema nel caso incomprimibile e Darciano, i.e. (4.3). I valori tentativo successivi sono calti in modo decrescente a partire da questo valore.

Il codice è anche in grado di stimare il *raggio equivalente* r_e , trovando la stima del raggio tale che

$$P(r = r_e) = P_n.$$

5 Modelli per un'analisi approfondita del flusso bifase nel bacino geotermico

Durante lo studio eseguito dal gruppo di ricerca, sono stati sviluppati anche due modelli matematici per il flusso bi-fase in regime isoterma di un fluido incomprimibile monocomponente in un mezzo poroso indeformabile. I due modelli si distinguono per il fatto che il primo considera solo la fase di coesistenza, mentre il secondo anche le fasi pure. La novità rispetto ai modelli esistenti in letteratura consiste essenzialmente nell'aver tenuto conto gli effetti inerziali del flusso. È infatti noto che, quando il numero di Reynolds relativo alla scala dei pori costituenti il mezzo poroso, è sufficientemente basso (< 50) la legge di Darcy (che non tiene conto degli effetti inerziali) fornisce un'ottima descrizione del moto del fluido. Quando però il numero di Reynolds risulta più grande (> 50 ma inferiore alla soglia del moto turbolento), la legge di Darcy deve essere corretta per tenere conto dell'inerzia che il fluido sviluppa. A questo scopo abbiamo utilizzato l'equazione costitutiva di Forchheimer in cui il gradiente di pressione dipende in maniera quadratica dalla velocità del fluido

$$\frac{\mu^\alpha}{kk_r^\alpha(S^\alpha)} \vec{v}^\alpha + \beta^\alpha \rho^\alpha |\vec{v}^\alpha| \vec{v}^\alpha = -\nabla P^\alpha \quad (5.1)$$

In un primo modello (vedi [4]) abbiamo considerato solamente la situazione di coesistenza della fase liquida e di quella gassosa. A causa della tensione superficiale, all'interfaccia fra queste due fasi il fluido presenta una differenza di pressione nota come pressione capillare

$$P_c = P^g - P^l. \quad (5.2)$$

La saturazione dei pori (ossia la frazione di volume occupata dal liquido) è funzione della pressione capillare e la sua relazione costitutiva viene prescritta empiricamente. Il modello matematico consiste nell'equazione di bilancio di massa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \rho^{\alpha} \right) + \nabla \cdot \left(\sum_{\alpha} \rho^{\alpha} \vec{v}^{\alpha} \right) = -Q \quad (5.3)$$

per le due fasi, nell'equazione costitutiva di Forchheimer (5.1) per entrambe le fasi e nelle equazioni di stato per la fase liquida e per la fase gassosa

$$\rho^g = \frac{\gamma P^g}{T}, \quad \rho^l = \rho_{sat} \exp \left[\lambda (P^l - P_{sat}) \right] \quad (5.4)$$

Assumendo valida la relazione di Kelvin (che lega la pressione delle fasi gassosa e liquida alla saturazione tramite la pressione capillare)

$$P^g = P_{sat} \exp \left(-\frac{\gamma P_c}{\rho^l T} \right) \quad (5.5)$$

abbiamo ridotto il problema (riformulato in geometria cilindrica) alla risoluzione di una equazione differenziale non lineare per la saturazione

$$F\left(\frac{dS^l}{dr}, S^l, r\right) = 0, \quad (5.6)$$

la cui soluzione permette di determinare lo stato termodinamico e meccanico del fluido. L'equazione (5.6) è stata poi linearizzata rispetto ad un parametro ε legato a fattori geometrici (il raggio del pozzo) e termodinamici (la costante di Forchheimer) del sistema e questo fatto è stato motivato dal valore piccolo che tale parametro assume con i dati di campo. Tale linearizzazione ha permesso di determinare soluzioni esplicite del problema. Sulla base di questo modello abbiamo infine effettuato alcune simulazioni numeriche “plottando” pressione, velocità e saturazione per diversi valori dei parametri fisici in gioco e confrontando le soluzioni nel caso di Darcy e in quello di Forchheimer (figure 12, 13).

Le principali conclusioni a cui siamo giunti sono le seguenti: i) nel dominio di coesistenza la saturazione e la pressione non si discostano considerevolmente dai valori assunti alla parete del pozzo. Il segmento nel quale la saturazione cresce fino al valore limite di 1 (quello in cui i pori sono completamente riempiti dal liquido) è piccolo se paragonato al dominio di coesistenza completo; ii) per valori di ε non eccessivamente piccoli il modello di Darcy e quello di Forchheimer differiscono notevolmente, dimostrando la necessità della correzione non lineare; iii) la dimensione del dominio di coesistenza è fortemente sensibile al dato di saturazione alla parete del pozzo. In particolare abbiamo dimostrato che, nel caso di saturazione nulla alla parete, il dominio di coesistenza diventa infinito.

In un secondo modello (vedi [3]) abbiamo considerato una estensione del modello descritto sopra in cui si suppone che oltre alla fase di coesistenza il fluido possa trovarsi anche nelle sue fasi pure soltanto. Come sopra, abbiamo supposto che l'evoluzione della fase di coesistenza sia determinata

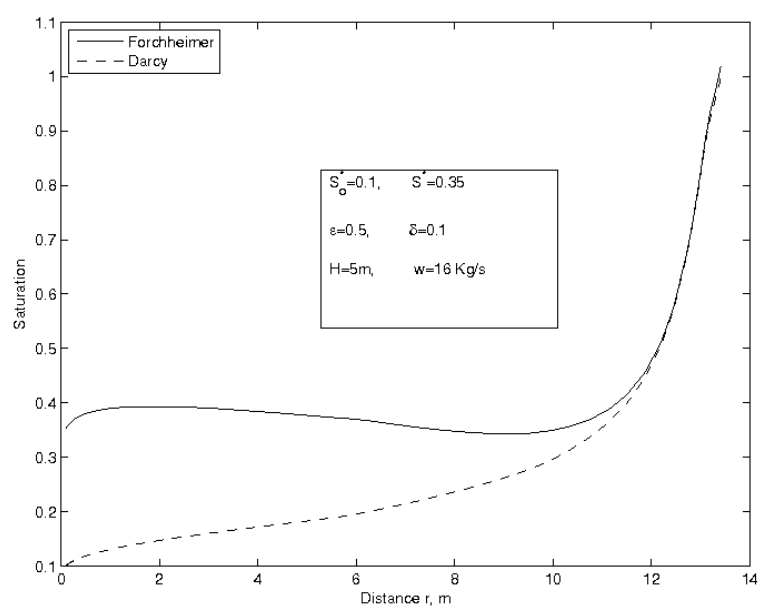


Figura 12: Saturazione in funzione della distanza dal pozzo

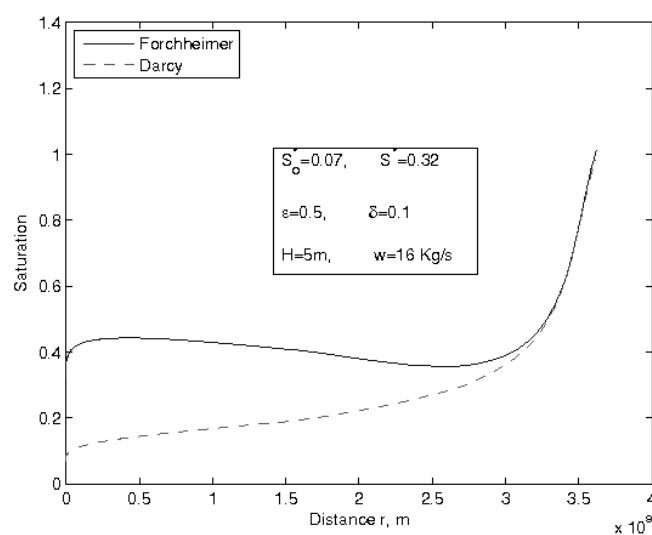


Figura 13: Saturazione in funzione della distanza dal pozzo

dalla presenza della pressione capillare, che il flusso avvenga in regime non isoterma e che il fluido sia comprimibile. Diversamente dal precedente sistema abbiamo dovuto riformulare il modello per una nuova incognita, dal momento che nelle fasi pure la saturazione non evolve (nel caso liquido vale 1 e in quello gassoso 0). Tale nuova incognita è la cosiddetta “parent density” $\rho(S^l)$ definita come la somma dei prodotti delle densità per le frazioni di volume delle fasi liquida e solida

$$\rho(S^l) = \rho^g(S^l)(1 - S^l) + \rho^l S^l \quad (5.7)$$

L’introduzione della “parent density” ha permesso di formulare il problema generale del flusso in tutte e tre le fasi (liquida, gassosa e di coesistenza). Le interfacce tra le varie fasi sono determinate imponendo la continuità del flusso totale di massa e il problema così ottenuto risulta essere un problema a frontiera libera in cui le frontiere sono curve di livello della “parent density”. La sua formulazione naturale è quella debole (o integrale)

$$\int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \rho + \frac{\partial \phi}{\partial x} W \right] dx dt == - \int_0^L (\phi \rho)(x, 0) dx + \int_0^T (\phi W)(1, t) dt - \int_0^T (\phi W)(0, t) dt. \quad (5.8)$$

dove Ω è il dominio tridimensionale del problema, $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$, ϕ è la funzione test e

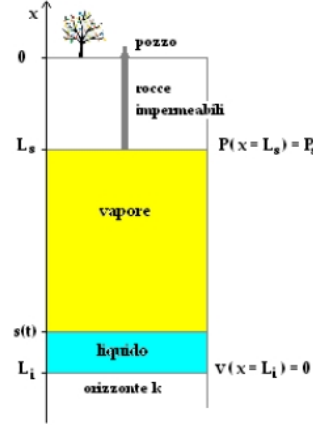
$$W(\rho, \rho_x) \quad (5.9)$$

è la funzione che esprime il flusso totale di massa. L’espressione esplicita di W è ottenuta tramite la relazione costitutiva di Forchheimer nelle fasi di coesistenza, solo gas e solo liquido. La formulazione (5.8) può ovviamente essere utilizzata al fine di effettuare simulazioni numeriche con il metodo degli elementi finiti. Il modello è di gran lunga più completo di quello precedente e consente di determinare i tempi di esaurimento di una fase o di un’altra così come il tempo di svuotamento dell’intero bacino geotermico. Il problema pratico più grande riguarda ovviamente la specificazione delle condizioni al contorno e iniziali che influenzano l’evoluzione del sistema e quindi la predizione che il modello può fornire per l’evoluzione del bacino. Una ipotesi che è stata avanzata, ma che non è stata ancora studiata, è l’accoppiamento al modello di bacino con un modello di pozzo che, a partire da dati termodinamici presi alla superficie del pozzo (problema inverso), possa fornire il dato al contorno da imporre alla parete del pozzo (si veda il paragrafo successivo).

6 Un modello 1D del bacino

Come già ampiamente dimostrato da Tsytkin ed altri [21, 22, 23, 24], la modellazione di un pozzo o di un sistema geotermico, sebbene ricorrendo ad approssimazioni anche drastiche, può essere svolta, in casi particolari, attraverso il ricorso ad un modello unidimensionale.

Tale approssimazione è già stata utilizzata, nell’ambito del progetto MAC-GEO, da Luca Meacci [12], laureatosi in Matematica proprio con una tesi di modellistica matematica unidimensionale del bacino geotermico di Monteverdi, di cui ripercorriamo brevemente nel seguito i tratti salienti, in modo da poter poi estendere il modello aggiungendo altri particolari che lo rendano più aderente alla realtà, pure nelle ovvie limitazioni del bacino 1D. Questa attività risulta propedeutica alla estensione del modello ad una configurazione geometrica più realistica, come il bidimensionale a simmetria cilindrica.



6.1 Il modello Meacci

Consideriamo una semplice conformazione del bacino geotermico come in figura 6.1. Per semplicità, supponiamo che il bacino geotermico sia semplicemente costituito da uno strato di roccia fratturata permeabile tra $x = L_s$ e $x = L_i$ in cui si muove il fluido, sovrastato da uno strato di roccia impermeabile a chiusura del bacino stesso, tra $x = 0$ e $x = L_s$. Il fluido, composto solo di acqua pura, presenta un'interfaccia *sharp* tra gas e liquido. In realtà, a priori non è immediato stabilire se il liquido si trova effettivamente più in basso del gas, tuttavia, si può dimostrare come questa ipotesi non è solo ragionevole in quanto il liquido ha una densità maggiore del gas, ma è anche verificata da altre condizioni del modello [12]. L'interfaccia tra gas e liquido in $x = s(t)$ è libera di muoversi in funzione del processo di evaporazione/liquefazione che dipende dalle condizioni di pressione e temperatura $P(x)$ e $T(x)$.

Per semplificare il modello, imponiamo inoltre che la temperatura sia fissata

$$T(x) = T_i - \frac{T_i - T_s}{L_i - L_s}(L_i - x) \quad (6.1)$$

lineare in x , tra T_i , presa come fissata al fondo del bacino, e T_s , altrettanto fissata al top del bacino. Con questa semplice assunzione, che comunque non si discosta molto dal caso reale, in quanto è verificato come la variabilità della temperatura in tempo sia estremamente piccola e lenta, il modello matematico si riduce alla sola equazione di conservazione della massa, mentre l'equazione di conservazione dell'energia è sostituita dalla Eq. (6.1).

Lo scopo di questo semplice modello è verificare se, in queste condizioni semplificate, sia possibile prevedere l'evoluzione di un campo a liquido in un campo a vapore. Tale evoluzione sta alla base probabilmente della genesi di Larderello. Condizioni ancora miste tra il campo *water dominated* e il *vapour dominated* sono ancora riscontrabili nella zona di Monteverdi Marittima.

Allo scopo di semplificare ulteriormente il modello, supponiamo che il bacino sia completamente isolato e quindi che la condizione da imporre sul fondo, sia di flusso nullo.

In queste condizioni, possiamo scrivere l'equazione di continuità per la zona del liquido.

$$\frac{\phi \partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_L v_L) = 0 \quad (6.2)$$

dove abbiamo supposto la porosità ϕ essere costante. La conservazione del momento è data semplicemente dall'equazione di Darcy per il liquido, ovvero

$$v_L = -\frac{K}{\nu_L} \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \rho_L g \right) \quad (6.3)$$

Assumendo ora che ρ_L sia costante, Eq. (6.2) si riduce semplicemente a

$$\frac{\partial v_L}{\partial x} = 0 \quad (6.4)$$

ovvero $v_L = \text{cost.}$ Avendo tuttavia imposto una condizione di flusso nullo sul fondo, ovvero $v_L(x = L_i) = 0$, tale soluzione implica che sia $v_L = 0$ ovunque; ovvero, la fase liquida si trova in quiete.

Ripetiamo il ragionamento per la fase gassosa. Questa volta, l'equazione di continuità, assumendo che il gas possa essere considerato ideale, ovvero

$$\rho_G = \frac{P_G}{rT} \quad (6.5)$$

dove $r = R/M$ è la costante universale dei gas riscalata per la massa molare del gas in oggetto, può essere scritta come

$$\frac{\partial P}{\partial t} \left(\phi \frac{P_G}{rT} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_G \frac{P_G}{rT} \right) = 0 \quad (6.6)$$

Anche questa volta, vale l'equazione di Darcy per la velocità del gas, ovvero

$$v_G = -\frac{K}{\nu_G} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G g}{rT} \right) = 0 \quad (6.7)$$

Ricordando che abbiamo assunto $T = T(x)$ fissato, e usando la precedente, l'equazione (6.6) si può riscrivere

$$\frac{\partial P_G}{\partial t} - \frac{KT}{\nu_G \phi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_G}{T} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{rT} g \right) \right] = 0 \quad (6.8)$$

L'equazione precedente, insieme alla $v_L = 0$ ottenuta in precedenza, rappresenta il sistema di equazioni in P_G e P_L che dovremo risolvere, imponendo opportune condizioni al bordo.

6.2 Discontinuità al contorno libero

Come accennato in precedenza, la presenza dell'interfaccia tra gas e liquido è schematizzata attraverso la presenza di un bordo libero che suddivide il dominio del problema in due sottodomini. Per il contorno libero occorre dare un'equazione di moto e derivare condizioni al bordo da imporre su P_G e P_L per risolvere il modello.

Imponiamo pertanto, che attraverso l'interfaccia ci sia continuità di flusso di massa. In altre parole, imponiamo che il materiale che attraversa l'interfaccia per effetto del cambiamento di fase sia conservato nella transizione. Se \dot{s} è la velocità del fronte (effettivamente un fronte di ebollizione), otteniamo perciò

$$\rho_G (v_G - \dot{s}) = \rho_L (v_L - \dot{s}) \quad (6.9)$$

Ricordando le Eq. (6.3,6.7), dalla precedente otteniamo, dopo un po' di algebra,

$$\dot{s} \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right) = \frac{K}{\phi \nu_G \rho_L} \left[\frac{P_G}{rT} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{rT} g \right) - \frac{\nu_G}{\nu_L} \rho_L \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \rho_L g \right) \right] = 0 \quad (6.10)$$

Nell'ipotesi ragionevole che sia $\rho_G \ll \rho_L$, l'equazione precedente si semplifica ulteriormente, in quanto al primo membro si ottiene solo \dot{s} . La precedente rappresenta quindi l'equazione di moto del fronte di ebollizione.

Per quanto riguarda la condizione da imporre alle pressioni sul bordo mobile, un semplice ragionamento fisico lascerebbe supporre che, essendo $P^*(T)$ la pressione di vapor saturo, il bordo

sia l'unico punto del dominio in cui coesistono in equilibrio il gas ed il liquido. L'uguaglianza delle pressioni all'equilibrio imporrebbe pertanto

$$P_L(x = s) = P_G(x = s) = P^* \quad (6.11)$$

Meacci tuttavia dimostra come questa condizione sia incompatibile con la condizione di flusso nullo e la conseguente $v_L = 0$ ottenuta in precedenza. Imponendo infatti la condizione (6.11) si otterrebbe che anche \dot{s} è identicamente zero, e quindi il sistema sarebbe in quiete (vd. [12]). Per ottenere una condizione da imporre alla pressione, diversa dalla precedente, oltre alla conservazione della massa, imponiamo che vi sia anche conservazione della quantità di moto attraverso l'interfaccia. Se definiamo pertanto χ il flusso di massa che attraversa la superficie (dato dall'equazione (6.9)) imporremo

$$\chi v_G + P_G = \chi v_L + P_L \quad (6.12)$$

Dalla definizione del flusso di massa $\chi := \rho_L(v_G - \dot{s}) = \rho_L(v_L - \dot{s})$, otteniamo

$$\dot{s} = v_L - \frac{\chi}{\rho_L} = v_G - \frac{\chi}{\rho_G} \quad (6.13)$$

Da cui, sostituendo in (6.9) abbiamo

$$\chi \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho_L} \right) = \rho_G (v_G - v_L) \quad (6.14)$$

Assumendo ancora $\rho_G \ll \rho_L$ e sostituendo la precedente in (6.12) otteniamo infine, attraverso il fronte,

$$P_L - P_G = \rho_G (v_G - v_L)^2 \quad (6.15)$$

Come già mostrato da Meacci [12], la condizione precedente differisce poco dalla più immediata (6.11), in quanto una semplice analisi dimensionale mostri che, anche nel caso $v_L = 0$, v_G sia in realtà piuttosto piccola. La differenza di pressione al bordo tra gas e liquido (ovvero tra i due lati dell'interfaccia) risulta quindi estremamente piccola. Questa piccola differenza tuttavia, permette al modello di avere una evoluzione e non ridursi al caso banale stazionario.

Data la (6.15), uno può, ad esempio, imporre semplicemente che

$$P_G(x = (s(t))) = P^* \quad (6.16)$$

$$P_L(x = s(t)) = P^* + \frac{P^*}{rT(s)} [v_G - v_L]_{x=s(t)} \quad (6.17)$$

Dall'analisi di (6.15) osserviamo un fatto non sorprendente, ma tuttavia importante, cioè che $P_L|_{x=s} > P_G|_{x=s}$. Se una differenza di pressioni ci deve essere infatti, è logico che la pressione del liquido sia maggiore di quella del gas, in modo che, in fase di estrazione, ci sia moto di materiale che vaporizza per risalire verso l'uscita. Dalla stessa condizione si ottiene inoltre (vd. [12]) che $\dot{s}v_G < 0$: ovvero, quando l'interfaccia tra gas e liquido scende, v_G è positivo (il gas sale) che è ovviamente compatibile con ciò che uno si aspetterebbe.

6.3 Risultati

Prima di passare ad una breve esposizione dei risultati numerici ottenibili dalla soluzione del sistema esposto nelle sezioni precedenti, rendiamo tutte le variabili adimensionali e riscaldiamo le equazioni in modo da valutarne le grandezze caratteristiche.

Adimensionalizziamo innanzitutto le variabili temporale e spaziale, attraverso la definizione di nuove grandezze adimensionali \tilde{t} e \tilde{x} . Definiamo poi pressione e temperatura \tilde{P} e \tilde{T} . Imponiamo pertanto

$$\begin{aligned} t &= \tau \tilde{t} & x &= \frac{\tilde{x} - L_s}{L_s - L_i} \\ P_\alpha &= P_0 \tilde{P}_\alpha & T &= T_i \tilde{T} \end{aligned}$$

dove l'indice α sta per L o G . Rimpiazzando le definizioni precedenti in (6.8) e (6.10), otteniamo che, imponendo

$$T_0 = \frac{gL}{r} \quad \tau = \frac{\nu_G L^2}{K P_0} \quad P_0 = \rho_L g L$$

dove $L = L_s - L_i$ è lo spessore del bacino geotermico, il problema da risolvere, adimensionalizzato risulta essere (omettiamo i \sim per semplicità e chiarezza di notazione)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P_G}{\partial t} - T \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_G}{T} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{T} \right) \right] &= 0 & (6.18) \\ \dot{s} &= \frac{P^\star}{T} \Big|_{x=s} \left[\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{T} \right]_{x=s} & (6.19) \\ P_G(x=0, t) &= P_S & (6.20) \\ P_G(x=s(t), t) &= P^\star(s(t)) & (6.21) \\ P_G(x, t=0) &= \bar{P}(x) & (6.22) \\ s(t=0) &= s_0 & (6.23) \end{aligned} \right.$$

Dove le due equazioni (6.22,6.23) rappresentano le due condizioni iniziali per la pressione e per la quota dell'interfaccia, mentre le due condizioni (6.20,6.21) rappresentano le due condizioni ai bordi superiore ed inferiore (libero) per la pressione del gas.

Per quanto riguarda infine la equazione per la zona liquida, essa può essere integrata semplicemente a mano, in quanto, come detto, abbiamo $v_L = 0$ identicamente, pertanto, dall'Eq. (6.3) otteniamo

$$\frac{\partial P_L}{\partial x} = -\rho_L g$$

che può essere integrata semplicemente tra x e $s(t)$ per ottenere

$$P_L(x) = P_L(s(t)) + \rho_L g [s(t) - x] \quad (6.24)$$

Imponendo poi che al bordo valga la condizione (6.17), si ottiene semplicemente l'andamento della pressione del liquido in funzione della quota a cui si trova il bordo libero.

6.3.1 Simulazioni

In questa sezione mostriamo alcuni risultati ottenuti attraverso la soluzione numerica del modello esposto sopra. Tali risultati compaiono già in gran parte nel lavoro di Meacci [12] e sono stati ottenuti mediante l'implementazione del modello in Comsol Multiphysics[®] [8]. Per implementare il problema dinamico del contorno libero, si è scelto di procedere attraverso il sistema a *moving mesh* di Comsol, come già spiegato da Meacci [12].

Per prima cosa, mostriamo la configurazione iniziale della mesh. Come si vede dalla figura 6.3.1, il dominio del gas si estende inizialmente, in variabili adimensionali, tra $x = 0$ e $x = -0.7$. Considerando che il bacino è supposto estendersi per 1800 m, tra $x = 0$ e $x = -1$, e che il top L_s è immaginato trovarsi a -1300 m di quota, questo corrisponde a supporre che il gas si estenda, all'istante iniziale, fino ad una profondità di circa 1560 m. Al di sotto di questa quota, si estende la zona del liquido (non raffigurata). Come previsto dal modello matematico

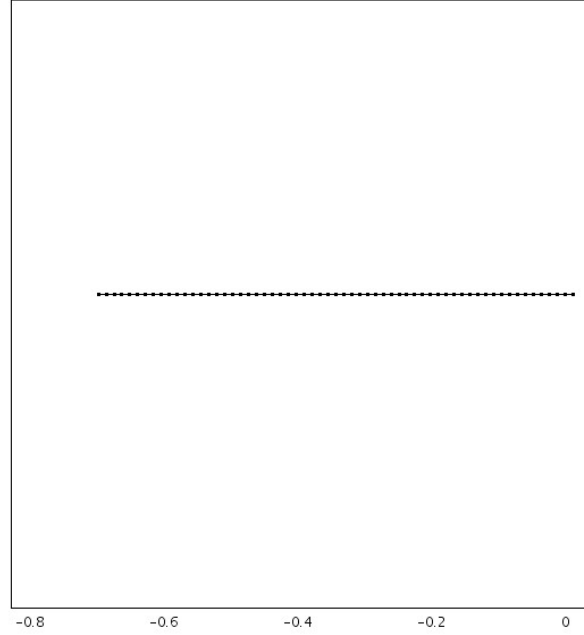


Figura 14: Mesh nella configurazione iniziale. La zona del gas, come mostrato in Fig. 6.1, si estende tra $x = 0$ e $x = L_s$. Qui abbiamo scelto L_s in modo che il suo valore adimensionalizzato sia $x = -0.7$.

esposto nelle sezioni precedenti, il bordo $x = 0$, corrispondente al top del serbatoio, è fermo. Qui si impone la condizione di stazionarietà della pressione, data da (6.20). In particolare, nelle nostre simulazioni noi abbiamo scelto un valore (dimensionale) della pressione al bordo top di 3 Mpa.

A questo punto, passiamo a plottare l'andamento della quota (adimensionale) a cui si trova l'interfaccia s in funzione del tempo (anch'esso adimensionale), entro i primi 5 tempi caratteristici. Come si vede dalla figura 15, la quota del bordo libero scende quasi linearmente con il tempo. Tuttavia, il suo moto è piuttosto lento. Considerato infatti che il tempo caratteristico τ è definito $\nu^G L^2 / KP_0$, e che $P_0 = \rho_L g L$, cioè circa 16 Mpa, risulta che $\tau \sim 3.6 \times 10^6$ s (circa 0.1 anni). Considerato inoltre il fatto che la Fig. 15 mostra nel riquadro che lo spostamento diventa apprezzabile solo per tempi dell'ordine del tempo caratteristico, ne deduciamo che su scala diffusiva, l'interfaccia è pressoché ferma. Ciò era stato già osservato da Meacci [12] mediante considerazioni generali.

Per quanto riguarda l'andamento della pressione, per semplicità abbiamo deciso di concentrarsi su un caso fisicamente poco significativo, ma semplice da implementare numericamente. Nel caso scelto, la pressione iniziale è presa lineare tra P_s (3 Mpa) in $x = 0$ e P^* in $x = s_0$. Un profilo lineare non sarebbe chiaramente compatibile con nessuna condizione di equilibrio preesistente. Meacci ha infatti mostrato come una soluzione stazionaria al problema può essere trovata con facilità numericamente e che il profilo risultante è tutt'altro che lineare. Tuttavia, come si vede dalla figura 6.3.1, il risultato della simulazione è piuttosto indipendente dal dato iniziale. Il profilo di pressione tende infatti ad assestarsi rapidamente su un profilo stazionario ben preciso (tutto avviene in tempi dell'ordine di $1/2 \tau$). Solo da quel momento in poi, con tempi caratteristici di evoluzione dell'ordine di τ , si comincia ad apprezzare lo spostamento dell'interfaccia.

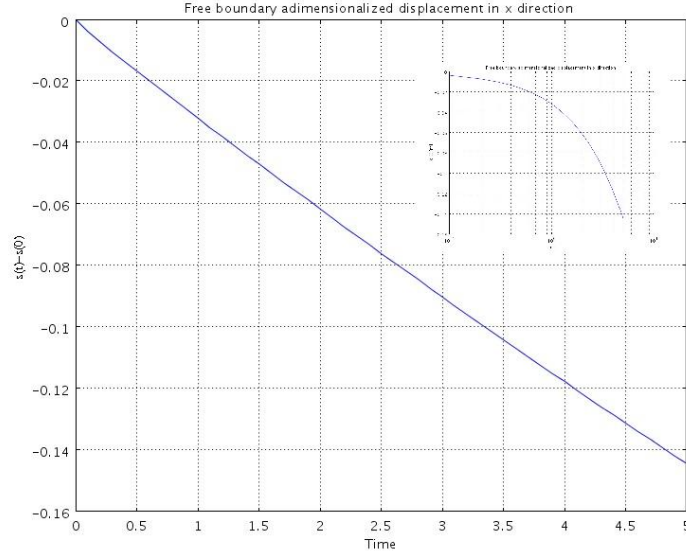


Figura 15: Spostamento adimensionale dell'interfaccia tra gas e liquido, in funzione del tempo caratteristico. L'andamento è abbastanza lineare. La raffigurazione dell'andamento dell'interfaccia in log-scale indica come, essenzialmente, lo spostamento diventa apprezzabile solo intorno a $t = \tau$, ovvero, ricordando la definizione delle grandezze caratteristiche, circa 3.5×10^6 s, cioè circa 0.1 anni. L'interfaccia si muove pertanto abbastanza lentamente.

Ciò dimostra ciò che avevamo preannunciato, cioè che il tempo di evoluzione dell'interfaccia è più lento dell'evoluzione del profilo di pressione legato alla diffusione del gas. Come si vede dalla figura 6.3.1, il profilo di pressione si modifica rapidamente, in un dell'ordine 0.5τ , fino a raggiungere il suo profilo finale. Nel periodo successivo, il profilo non si modifica quasi più e domina l'effetto di vaporizzazione all'interfaccia.

Un'altra considerazione che possiamo fare rispetto alla figura 6.3.1 è che anche un semplice modello come questo, con una condizione di bacino isolato al bordo inferiore, permette di verificare che, se le condizioni termodinamiche lo consentono, un bacino *water dominated* può evolvere in un *vapour dominated*. A partire infatti da un bacino completamente pieno o quasi di acqua allo stato liquido, ad esempio partendo da un valore di s_0 vicino a 0, avremmo che il livello dell'interfaccia gas-liquido tende ad abbassarsi fino a raggiungere il valore $s(t) = -1$, corrispondente ad un modello di bacino completamente pieno di vapore e libero di acqua allo stato liquido. Una evoluzione di questo tipo, a quanto pare, potrebbe essere all'origine di Larderello e campi simili. Chiaramente, nei casi reali, tale fenomeno evolutivo è sostenuto da condizioni anche strutturali favorevoli. Ad esempio, l'ipotesi di bacino isolato porterebbe inevitabilmente ad un esaurimento del campo ed un abbassamento della pressione fino a livelli comparabili con quello imposto al bordo top. Come vedremo in seguito tuttavia, tale fenomeno può essere evitato introducendo una ricarica di qualche tipo nel baicino, senza necessariamente dovere modificare le condizioni al bordo.

Per quanto riguarda inoltre la scala temporale entro cui avvengono i fenomeni di maggiore interesse, il modello fornisce risultati compatibili con l'evidenza sperimentale. Risulta infatti da campagne di sperimentazione condotte da Enel, che i fenomeni di modifica dei profili di pressione o altezza del battente d'acqua sono molto lenti. Si verifica infatti che l'eventuale sovrasfruttamento di un pozzo (o cluster di pozzi) sia evidente solo nel giro di mesi anni. Il

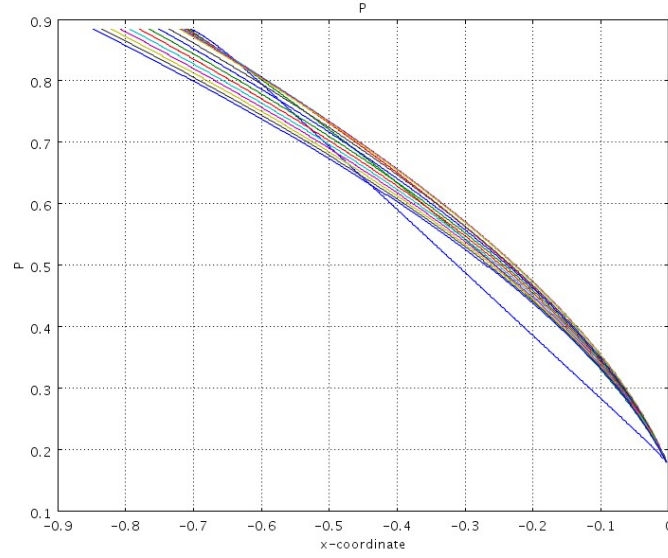


Figura 16: Rappresentazione del profilo di pressione (adimensionale) in funzione della quota (adimensionale) a diversi tempi (adimensionale) tra $t = 0$ e $t = 5\tau$. Il profilo, scelto inizialmente lineare in x , evolve rapidamente nei primi 0.5τ in un profilo che rimane poi stazionario per tutto il periodo seguente. Solo da $t \simeq \tau$ risulta apprezzabile lo spostamento verso il basso dell'interfaccia, che è visibile per il fatto che l'estremo a sinistra del dominio si sposta verso valori maggiormente negativi.

nostro modello dimostra che il fronte di saturazione si muove in scala di tempi di alcuni mesi, compatibilmente con l'osservazione. Lo stesso si potrebbe dire dei tempi di riequilibrio post-sfruttamento; si verifica che a seguito della chiusura di un pozzo la pressione si ristabilisce nel giro di alcuni mesi.

Un'ultima considerazione infine, possiamo farla relativamente al profilo di pressione. La figura 6.3.1 indica un profilo quasi stazionario di pressione. L'evoluzione del profilo è infatti legata al moto del fronte di saturazione, più che ad una modifica delle condizioni interne al dominio. Nella realtà, l'estrazione è controbilanciata da una ricarica al bordo. Se l'estrazione è tarata in modo da non sovrasfruttare il sistema, anche la dinamica del fronte può essere arrestata.

6.4 La ricarica del bacino

Come preannunciato, passiamo ora ad introdurre alcune modifiche al modello di Meacci, in modo da renderlo un poco più aderente alla realtà. Lasciando intatta la struttura del modello, ancora consistente in una schematizzazione unidimensionale, con fluido geotermico costituito da acqua pura e una configurazione termodinamica semplice (profilo di temperatura fissato, lineare in x , presenza di gas sopra allo strato di acqua) e condizioni di flusso nullo ai bordi, introduciamo una fonte di ricarica del fluido. Ciò può essere fatto semplicemente aggiungendo un termine sorgente lungo tutto l'asse x . Sebbene anche questa sia una semplice schematizzazione, la genesi di un tale termine sorgente risiede nell'integrazione che supponiamo di aver fatto, quando siamo passati da geometria tridimensionale a simmetria cilindrica, ad una geometria 1D. In questa integrazione, ci saremmo trovati infatti due termini di flusso: uno in direzione x , che abbiamo effettivamente mantenuto, ed uno in direzione radiale, che nel modello precedente abbiamo semplicemente

ridotto a zero. Mantenendo questo termine, nell'equazione di continuità avremmo la comparsa di un termine sorgente, che dipende verosimilmente dalla pressione alla quota x a cui ci troviamo.

Con questa semplice nuova ipotesi, andiamo quindi a riscrivere il modello matematico risultante. Cominciamo, come in precedenza, dall'equazione di continuità, questa volta, della fase gassosa. Con l'introduzione di un termine sorgente ψ_{in} , avremo

$$\phi \frac{\partial \rho_G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_G v_G) = \psi_{\text{in}} \quad (6.25)$$

Dove, come prima, vale l'equazione di Darcy (6.7)

$$v_G = -\frac{K}{\nu_G} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \rho_G g \right)$$

Assumiamo ancora che il gas sia schematizzabile da un gas ideale, ovvero $\rho_G = P_G/rT$.

Per quanto riguarda il termine sorgente, una ipotesi ragionevole è che, per ogni valore di x , sia proporzionale alla differenza tra la pressione P_G ed una pressione (anch'essa funzione della posizione), lontano dal prelievo. Ammettiamo cioè che ci sia un termine di ricarica del bacino, lontano dal prelievo, da cui il bacino attinge fluido. Una ipotesi per questo fronte di ricarica, trattandosi di vapore, potrebbe essere quindi che $\psi_{\text{in}} \propto (P^* - P_G)$. In altre parole, ipotizziamo che il vapore che preleviamo, oltre che dal fronte di saturazione possa provenire anche da un fronte di ebollizione che circonda il bacino stesso (come, sembra, succeda nel bacino di Larderello). Per quanto riguarda la costante di proporzionalità, possiamo ipotizzare che il moto del fluido dalla ricarica obbedisca anch'esso alla legge di Darcy. Questa volta, potremmo avere un valore della permeabilità diverso (più basso) dal precedente, che contraddistingueva la zona produttiva fratturata. Si potrebbe ipotizzare cioè un mezzo poroso permeabile, con una permeabilità dell'ordine di 1/100 di quella della zona fratturata che abbiamo utilizzato fino ad ora. In questa ipotesi, e supponendo che tale fronte di ricarica si trovi ad una distanza caratteristica R (dell'ordine di alcuni chilometri), avremmo che il termine sorgente potrebbe essere scritto come

$$\psi_{\text{in}} = \frac{cK'}{\nu_G R} (P^* - P_G) \quad (6.26)$$

dove la costante c è introdotta per ottenere da questa relazione le dimensioni giuste ($[\psi_{\text{in}}] = [t^{-1}]$), cioè $[c] = [ml^{-4}]$, ed ha un valore numerico tale da fornire una ricarica compatibile con i dati sperimentali.

Inserendo la precedente e Darcy nell'equazione di continuità otteniamo l'equazione per la pressione P_G

$$\frac{\partial P_G}{\partial t} - \frac{KT}{\phi \nu_G} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_G}{T} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{g}{r} \frac{P_G}{T} \right) \right] = \frac{cK'rT}{\phi \nu_G R} (P^* - P_G) \quad (6.27)$$

6.4.1 Il tempo di ricarica

Come preannunciato, valutiamo la costante c che abbiamo introdotto nella sezione precedente, in modo da ottenere una ricarica che abbia un tempo caratteristico compatibile con i risultati sperimentali. Per farlo, semplifichiamo ulteriormente il modello, mettendoci ad una quota x fissata e trascuriamo il moto del fluido lungo l'asse x . In questo modo, l'equazione (6.27) si semplifica in

$$\frac{\partial P_G}{\partial t} = \alpha (P^* - P_G)$$

La quale rappresenta un decadimento esponenziale

$$P^*(t) - P_G(t) = (P^*(0) - P_G(0)) e^{-\alpha t}$$

In altre parole, P_G torna ai valori di P^* , in un tempo caratteristico dell'ordine di $1/\alpha$, che può essere stimato, considerando $\phi \sim 10^{-2}$, $R \sim 10^4$ m, $\nu_G \sim 10^{-5}$ Pa s, $r \simeq 5 \times 10^2$ J/kg K, $T \simeq 600$ K, $K' \sim 10^{-16}$ m², otteniamo $t_c = 1/\alpha = \phi \nu_G R / c K' r T \sim 3 \times 10^{10} / c$ s. Possiamo imporre, compatibilmente con l'evidenza sperimentale, che la ricarica avvenga con tempi caratteristici dell'ordine dei 10 anni, ovvero 3×10^8 s, da cui otteniamo che si deve avere $c \sim 100$ kg/m⁴.

6.5 Il modello completo

Con le verifiche e le ipotesi fatte, torniamo ora alla equazione (6.27). A questa equazione dobbiamo aggiungerne una equivalente per la fase liquida. Anche questa volta, assumiamo ρ_L costante. Assumiamo inoltre che, come prima $\psi_{in}^L = cK'/\nu_L R (\bar{P}_L - P_L)$. Questa volta, la sorgente è immaginata ad una pressione \bar{P}_L che potrebbe, ad esempio, essere semplicemente una pressione idrostatica, del tipo $\bar{P}_L = \rho_L g L_i$. Immaginiamo cioè che il liquido di ricarica venga da lontano, da una zona cioè in cui la pressione è costantemente uguale all'idrostatica e non è influenzata dal prelievo o dalla deprussirazione del bacino. Con questa semplice ipotesi, l'equazione per P_L risulta semplicemente

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial P_L}{\partial x} + \rho_L g \right] = \frac{cK'}{K \rho_L R} (\bar{P}_L - P_L) \quad (6.28)$$

Per quanto riguarda il fronte di saturazione tra liquido e gas, assumiamo ancora continuità di flusso attraverso il fronte, ovvero $\rho_G(v_G - \dot{s}) = \rho_L(v_L - \dot{s})$. Utilizzando ancora Darcy per le velocità e semplificando, otteniamo ancora l'equazione di moto del fronte

$$\dot{s} = \frac{K}{\phi \nu_G \rho_L} \left[\frac{P_G}{rT} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{rT} g \right) - \frac{\nu_G}{\nu_L} \rho_L \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \rho_L g \right) \right] \quad (6.29)$$

dove abbiamo ancora sfruttato la semplificazione introdotta dall'ipotesi $\rho_G/\rho_L \ll 1$.

Per quanto riguarda la condizione da imporre al bordo mobile, questa volta, la condizione $P_G(s(t)) = P_L(s(t)) = P^*(s(t))$, non sarebbe di per sé incompatibile con la dinamica, in quanto questa incompatibilità veniva dal fatto che l'equazione per il liquido si riduceva a $\partial v_L / \partial x = 0$, ovvero $v_L(x) = v_L(L_i) = 0$, nell'ipotesi di flusso nullo dal fondo. Questa volta, il termine sorgente in (6.28) impedisce che la soluzione si riduca a $P_L(x) = P_L(s(t)) + \rho_L g [s(t) - x]$. Tuttavia, assumendo ancora la continuità del momento attraverso l'interfaccia, otteniamo ancora la condizione che avevamo trovato in precedenza in (6.15) $P_L - P_G = \rho_G (v_G - v_L)^2$. Imponendo, come prima $P_G|_{x=s(t)} = P^*(s(t))$, dalla precedente otteniamo la condizione che dovremmo imporre su P_L , ovvero

$$P_L|_{x=s(t)} = P^*(s(t)) + \frac{P_G}{rT} \Big|_{x=s(t)} \left(\frac{K}{\phi \nu_G} \right)^2 \left[\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{rT} - \frac{\nu_G}{\nu_L} \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \rho_L g \right) \right]_{x=s(t)}^2 \quad (6.30)$$

Nelle simulazioni, manterremo comunque l'ipotesi $P_G = P_L = P^*$, anche considerando che, come già verificato v_G è piuttosto piccola.

Come prima, ipotizzeremo nota la pressione $P_G(L_s)$, fissata la pressione al fondo del bacino $P_L(L_i)$ e noti i valori iniziali di $s(t=0)$ e i profili di pressione $P_G(x, t=0)$ e $P_L(x, t=0)$.

6.6 Set up finale e simulazioni

Passiamo ora alla adimensionalizzazione del sistema. Come prima definiamo $P_{G,L} = P_0 \tilde{P}_{G,L}$, $T = T_0 \tilde{T}$, $t = \tau \tilde{t}$ e $x = \tilde{x} - L_s/L$, dove $L = L_s - L_i$. Con queste notazioni, e imponendo $T_0 = gL/r$, $\tau = \phi \nu_G R / cKgL$, $P_0 = cgL^3/R$, otteniamo la forma finale del sistema da risolvere completo di condizioni al bordo ed iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_G}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{P_G}{T} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{T} \right) \right] = T (\bar{P} - P_G) \end{array} \right. \quad (6.31)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \alpha \right) = \frac{1}{\alpha} (\bar{P}_L - P_L) \quad (6.32)$$

$$\dot{s} = \left[\frac{1}{\alpha} \frac{P_G}{T} \left(\frac{\partial P_G}{\partial x} + \frac{P_G}{T} \right) - \left(\frac{\partial P_L}{\partial x} + \alpha \right) \right] \quad (6.33)$$

$$P_G(x=0, t) = P_s \quad (6.34)$$

$$P_G(x=s, t) = P^* \quad (6.35)$$

$$P_L(x=-1, t) = P_i \quad (6.36)$$

$$P_L(x=s, t) = P^* \quad (6.37)$$

$$P_G(x, t=0) = P_G^0(x) \quad (6.38)$$

$$P_L(x, t=0) = P_L^0(x) \quad (6.39)$$

$$s(t=0) = s_0 \quad (6.40)$$

Dove tutte le variabili sono ora adimensionali ed abbiamo omesso i per chiarezza e semplicità di notazione, ed abbiamo definito $\alpha = \rho_L R / cL^2$.

6.6.1 Risultati numerici

Come prima mostriamo prima di tutto l'andamento della quota adimensionale del fronte di saturazione, in funzione del tempo (multipli di τ). In Fig. 6.6.1 è rappresentato il valore adimensionale di s in funzione del tempo. Come si vede, a differenza del caso precedente (Fig. 15), ora il fronte tende a stabilizzarsi su una quota stazionaria. Nel caso precedente, senza l'apporto di una sorgente di fluido esterna, il fronte andava via via approssimando il fondo del serbatoio, linearmente. Questo sembra indicare che esiste una soluzione non banale al problema stazionario che si ottiene imponendo che tutte le derivate temporali si annullino.

Il profilo di pressione lungo l'asse x conferma questa impressione. Fig. 6.6.1 mostra l'andamento della pressione adimensionale $P_{G,L}$ in funzione della quota adimensionale, per t che va da 0 a 3τ , ad intervalli regolari di 0.01τ . Partendo, come prima, da un profilo lineare della pressione, il profilo prima assume una forma definita. Il fronte quindi comincia ad abbassarsi per effetto della evaporazione. Grazie all'apporto di materiale dalla sorgente tuttavia, il fronte non raggiunge il fondo del serbatoio, ma si assesta su un valore stazionario, di poco inferiore a $x = -0.9$.

Il contributo del termine sorgente è quantificabile attraverso la visualizzazione di $(\bar{P} - P)$, dove \bar{P} è P^* nel caso del gas e \bar{P}_L , mentre P è P_G o P_L . La figura 6.6.1 mostra come il termine sorgente ψ_{in} sia positivo sia per il gas che il liquido. La sorgente fornisce quindi una effettiva ricarica del bacino, contribuendo al raggiungimento della condizione di stazionarietà.

Rappresentiamo infine, in Fig. 6.6.1 la velocità di Darcy adimensionale, che compare nei termini di flusso delle equazioni (6.31,6.32). La figura 6.6.1 mostra che, mentre il vapore fluisce sempre verso l'alto ($v_G > 0$), il liquido fluisce verso il basso nelle fasi iniziali. In queste fasi

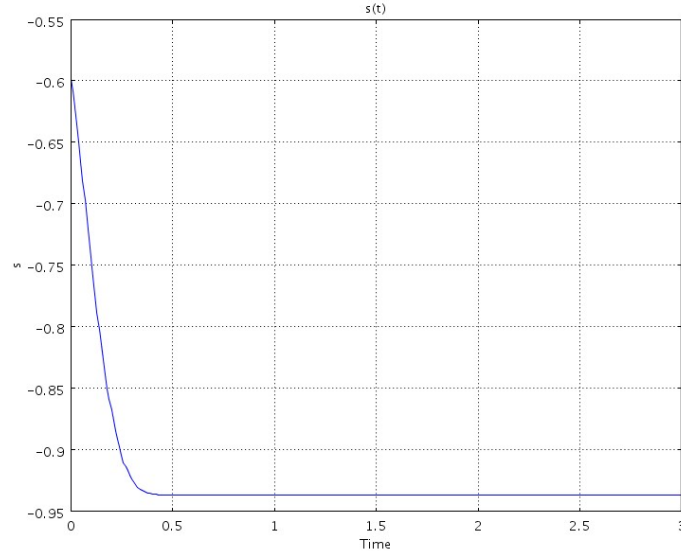


Figura 17: Andamento della quota adimensionale del fronte di saturazione $s(t)$ in funzione del tempo. All'istante iniziale, il bacino consiste in gas tra $x = 0$ e $x = s_0 = -0.6$ e liquido tra s_0 e $x = -1$. Con l'andare del tempo, il fronte scende rapidamente sotto $x = -0.9$ e si assesta su un valore stazionario.

tuttavia, domina il termine di gravità (α in Eq. (6.32)), che spinge la somma dei due contributi verso valori negativi. Con l'aumentare della pendenza di P_L , il contributo convettivo diventa dominante, portando il flusso verso l'alto. Non è escluso che tale andamento sia dovuto in parte alla scelta delle condizioni iniziali. Ricordiamo inoltre che la pressione è fissata ad entrambi i capi del dominio del liquido, in quanto imponiamo $P_L = P^*$ al top e $P_L = P_i$ al bottom. Sarebbe forse più ragionevole imporre una condizione dinamica al bottom, ad esempio legata all'idrostatica. Non riteniamo tuttavia particolarmente interessante approfondire quest'argomento, in quanto il modello risulta comunque troppo semplificato per svolgere analisi verosimili sul bacino reale.

6.7 Conclusioni e piano di lavoro

Il lavoro svolto sul modello unidimensionale mostra che, anche con forti ipotesi semplificative, il sistema sembra offrire alcuni spunti di analisi che richiamano il caso reale. I fattori di scala principali, così come alcuni comportamenti generali sono correttamente interpretabili anche attraverso il modello 1D.

Chiaramente, a fronte di una forte semplificazione delle equazioni, il modello 1D non può essere utilizzato per dare una descrizione realistica del bacino, soprattutto in termini quantitativi. Non è escluso tuttavia che molti dei comportamenti del bacino 1D siano qualitativamente non dissimili dal caso generale.

L'ulteriore semplificazione introdotta nell'utilizzo di un fluido monocomponente, permette, da un lato di ridurre il numero di equazioni ad un sistema trattabile e comprensibile. Dall'altro, tuttavia, obbliga la coesistenza tra liquido e vapore solo su un fronte di saturazione che si riduce, essenzialmente ad un punto. Questa forte limitazione potrebbe essere rilassata introducendo una ulteriore variabile spaziale, ad esempio estendendo il modello 1D ad un modello 3D a simmetria cilindrica. Di fatto, in quel caso, il sistema di equazioni dovrebbe prevedere le derivate radiali

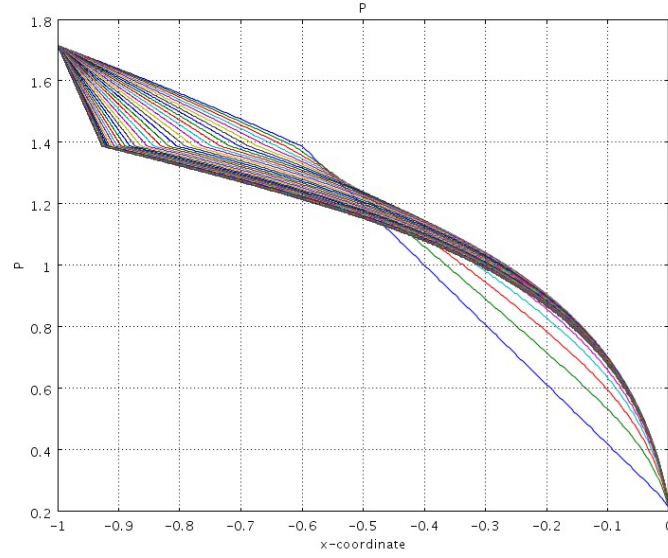


Figura 18: Profilo della pressione in funzione della quota a intervalli di tempo regolari 0.01τ , tra $t = 0$ e $t = 3\tau$. La condizione di raccordo delle pressioni $P_L(s) = P_G(s) = P^*$ assicura la continuità della soluzione attraverso il fronte. Le soluzioni sembrano inoltre addensarsi rapidamente su un profilo stazionario.

per i flussi e una equazione ulteriore per la velocità del fronte di saturazione, che ora avrebbe due componenti (una lungo l'asse e una radiale). Sebbene anche il modello 2D risultante non potrebbe certamente essere significativo per una descrizione completa del bacino reale, si potrebbero, verosimilmente, introdurre considerazioni aggiuntive e avvicinarsi, almeno qualitativamente, a casi più vicini alla realtà.

7 Modello di cluster con densità discontinua

7.1 Setup del modello

Assumiamo, per semplicità, di poter schematizzare ancora il cluster come un sistema unidimensionale. Assumiamo inoltre di poter trascurare la variazione in tempo della temperatura, e fissiamo, come prima, un andamento lineare della temperatura, del tipo

$$T(x) = T_t - x(T_b - T_t) \quad (7.1)$$

dove abbiamo già adimensionalizzato le variabili e x varia tra 0 (top del serbatoio, con temperatura T_t) e -1 (bottom del serbatoio, con temperatura T_b).

Assumiamo, come prima, che il fluido geotermico sia composto solo da acqua. Ancora una volta, si otterrà che, al variare del valore della pressione, la densità del fluido assume valori diversi, ovvero

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho = \rho_G = \frac{P}{rT} & \text{se } P < P^*(T) \\ \rho = \rho_L & \text{se } P > P^*(T) \\ \rho = S^G \rho^G + (1 - S^G) \rho^L & \text{se } P = P^*(T) \end{array} \right. \quad (7.2)$$

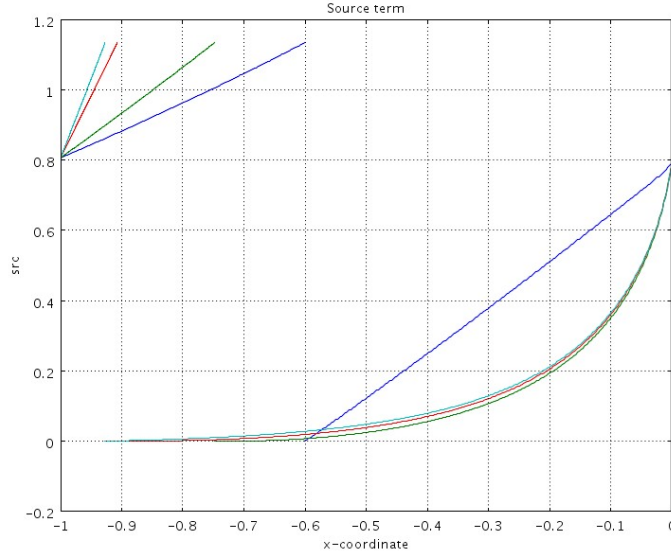


Figura 19: Rappresentazione del termine sorgente in funzione di x , a tempi diversi ($t = 0, 0.1\tau, 0.2\tau$, e 3τ). Il contributo della sorgente è quasi sempre positivo, indice del fatto che la ricarica fluisce effettivamente dalla periferia al bacino, fornendo una effettiva ricarica di fluido.

dove abbiamo chiamato S^G la frazione di volume del gas (ovvero la saturazione) e $P^*(T)$, la pressione di vapor saturo dell'acqua. Ancora una volta, ma questa semplificazione non è essenziale e potrebbe essere sostituita con una equazione di stato, ad esempio, lineare in T e in P , assumiamo ρ^L costante.

Con questa assunzione, come prima, il modello di conservazione si riduce semplicemente all'equazione di continuità. La differenza sostanziale rispetto al caso precedente, risiede nel fatto che ora non obblighiamo il vapore ad occupare solo la parte di dominio al di sopra del fronte libero di evaporazione. Assumiamo invece che la densità rispetti i vincoli (7.2) dati dalla semplice termodinamica del sistema. Con queste notazioni, le equazioni di conservazione si riducono semplicemente all'equazione

$$\frac{\phi \partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (S^G \rho^G \mathbf{v}^G + (1 - S^G) \rho^L \mathbf{v}^L) = 0 \quad (7.3)$$

dove ρ è dato dall'Eq. (7.2) e, ancora una volta, la velocità di flusso è data dalla velocità di Darcy, ovvero

$$\mathbf{v}^{G,L} = -\frac{K}{\nu^{G,L}} (\nabla P + \rho^{G,L} \mathbf{g}) \quad (7.4)$$

Osserviamo, che nei casi monofase, ovvero $P \neq P^*(T)$, la variabile dell'equazione (7.3) è proprio la pressione, in quanto la densità è una funzione di P . Nel caso invece in cui $P = P^*(T)$, la pressione è data dalla temperatura, e la variabile del problema è la saturazione S^G . Chiaramente, questa distinzione può avere senso solo in un modello continuo. Dato infatti che, anche in un modello tridimensionale, la coesistenza di fase si ridurrebbe alla sola superficie di separazione tra le due fasi liquido e vapore, nella discretizzazione questa ipotesi si perde, in quanto ci saranno celle in cui vale $P > P^*$ e celle in cui, viceversa $P < P^*$, ma non ci saranno celle in cui vale esattamente $P = P^*$.

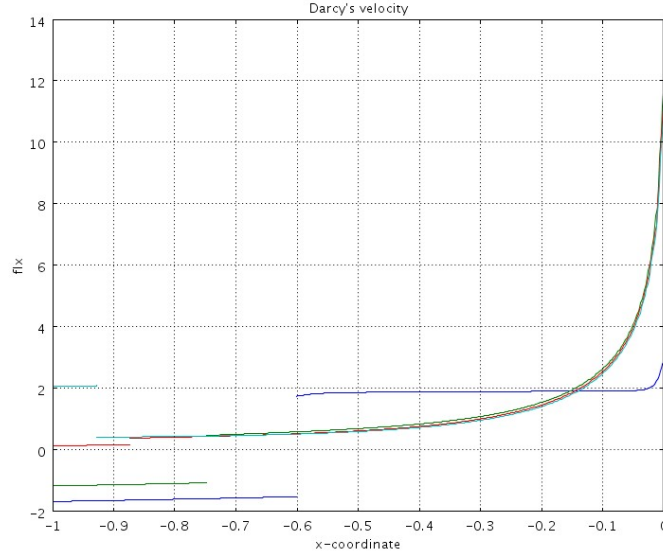


Figura 20: Plot della velocità di Darcy adimensionale, che compare nei termini di advection delle Eq. (6.31,6.32). Mentre la velocità del gas è sempre positiva, indicando che il vapore fluisce correttamente verso l'uscita. Il liquido invece, nei primi istanti sembra fluire verso il basso. Il moto è tuttavia, in questa fase iniziale, dominato dalla gravità in quanto il termine convettivo $-\partial P_L/\partial x$ è comunque positivo.

Sostituendo le definizioni (7.2) e (7.4) in (7.3) e semplificando, otteniamo, in forma generale

$$\begin{aligned} & \phi \frac{\partial}{\partial t} \left[S^G \frac{P}{rT} + (1 - S^G) \rho^L \right] - \\ & \nabla \cdot \left\{ S^G \frac{P}{rT} \frac{K}{\nu^G} \left(\nabla P + \frac{P}{rT} \mathbf{g} \right) + (1 - S^G) \rho^L \frac{K}{\nu^L} \left(\nabla P + \rho^L \mathbf{g} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove S^G è essenzialmente dato dalla funzione di Heaviside $\Theta(P^* - P)$, ovvero

$$\begin{cases} S^G = 1 & \text{se } P < P^*(T) \\ S^G = 0 & \text{se } P > P^*(T) \\ 0 < S^G < 1 & \text{se } P = P^*(T) \end{cases} \quad (7.6)$$

7.2 Risultati preliminari

Per semplicità, ipotizziamo prima di tutto di imporre una condizione di bacino isolato, ovvero condizioni di flusso nullo, al bottom del sistema. Al top imponiamo invece un prelievo di fluido costante. I valori numerici sono derivati da casi realistici. Imponiamo perciò che il fondo del serbatoio sia situato a circa 3000 m di profondità e che la zona produttiva si estenda per circa 2000 m, da -1000 ($x = 0$) a -3000 ($x = -1$). Imponiamo inoltre che il prelievo venga fatto tutto dal bordo superiore, ad un rate di circa 1500 t/h. La variazione di densità dovuta al prelievo, è ottenuta riscaldando il rate di prelievo di massa per un volume di influenza che, per il momento, consideriamo arbitrario. Per la verità, questo valore influenza solo la velocità della dinamica del

sistema, in quanto la portata adimensionale di densità in uscita è definito da

$$\Psi = \frac{\tau Q}{V_0 \rho_0} \quad (7.7)$$

dove $\tau = L\nu_G/\rho_0 g K$ è il time scale del sistema, con L spessore della zona produttiva, ν_G viscosità del gas, e K la permeabilità della zona produttiva (2000 m) e ρ_0 la densità di scaling, che abbiamo scelto 1000 kg/m^3 , ovvero la densità dell'acqua in condizioni standard.

Con le ipotesi esposte, le condizioni al bordo per il sistema sono quindi

$$\begin{cases} \mathbf{i} \cdot [S^G \rho^G \mathbf{v}^G + (1 - S^G) \rho^L \mathbf{v}^L] = \Psi & \text{in } x = 0 \\ -\mathbf{i} \cdot [S^G \rho^G \mathbf{v}^G + (1 - S^G) \rho^L \mathbf{v}^L] = 0 & \text{in } x = -1 \end{cases} \quad (7.8)$$

$$(7.9)$$

dove \mathbf{i} è il versore in direzione x (positivo in senso di x crescente) e \mathbf{v} è la velocità di Darcy (7.4).

Con questa semplice configurazione, ipotizziamo una condizione iniziale in cui il bacino sia *water dominated*, ma con presenza di vapore nei pressi del top (vd. Fig. 7.2). La pressione ha

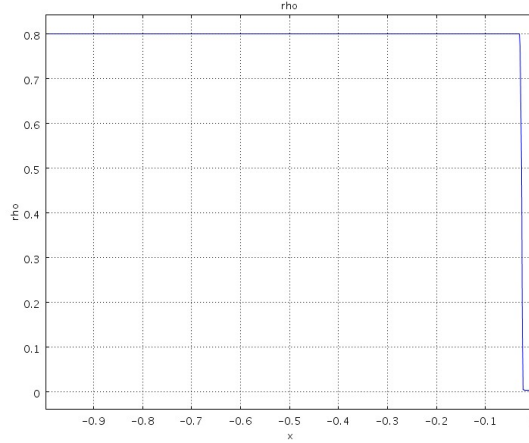


Figura 21: Andamento della densità a $t = 0$. Il bacino è occupato quasi interamente da liquido a densità costante. Nella zona immediatamente vicina al bordo superiore $x = 0$, il valore della pressione è inferiore alla pressione di vapore saturo e la densità è quella del gas ideale.

inizialmente un valore lineare del tipo $P = P_t - x(P_b - P_t)$ che, ovviamente non rappresenta una condizione di equilibrio per il bacino. Il sistema tende perciò ad andare verso un suo equilibrio fisico che, come si vedrà, è fortemente influenzato dalla scelta delle condizioni al bordo.

Con la scelta che abbiamo fatto, ovvero di flusso nullo al fondo del serbatoio, ma imponendo un rate di prelievo costante, ci aspettiamo, ovviamente, che il bacino si svuoti in un certo tempo. Senza necessità di raggiungere la condizione di equilibrio, si verifica che ciò effettivamente avviene, sebbene molto lentamente. Come si vede dalla Fig. 7.2, il bacino presenta, nella configurazione a $t = 0$, solo una zona di vapore immediatamente a ridosso del bordo superiore del dominio, cioè del punto di prelievo. La pressione infatti, è impostata, come dato iniziale, in modo da avere valori superiori alla pressione di vapore saturo quasi ovunque, salvo in quella piccola zona al top del serbatoio. Avendo tuttavia assunto un prelievo costante ed una assenza di ricarica dal fondo, il bacino tende lentamente a svuotarsi. L'espansione del fluido avviene perciò, non omogeneamente, ma ovunque, in tutto il dominio (vd. Fig. 7.2). La Fig. 7.2 mostra come la pressione scenda in tutto il dominio in tempi abbastanza lunghi. Tenuto conto infatti il time

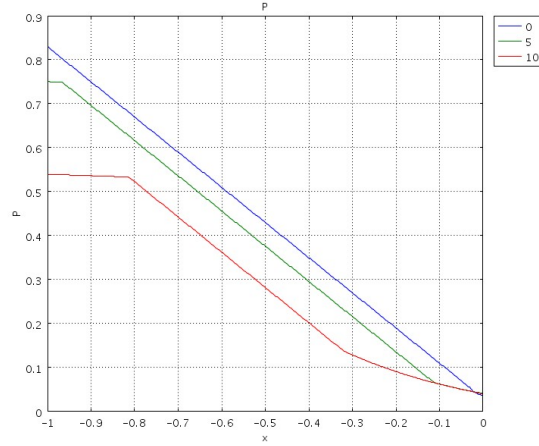


Figura 22: Valore della pressione adimensionale, in funzione della profondità a $t = 0$, $t = 5\tau$ e $t = 10\tau$. Come ci si aspetta, la pressione cresce in tutto il bacino da un profilo iniziale lineare, ad un profilo più complesso, tendendo, per tempi lunghi, ad un profilo di equilibrio di tipo vapor-statico.

scale τ , con le scelte che abbiamo fatto, è dell'ordine di 15 anni, vediamo come il bacino tenda effettivamente a depressurizzarsi dal top verso il fondo, ma in tempi piuttosto lunghi. Come si vede, già a $t = 10\tau$, il profilo si discosta abbastanza dal profilo lineare iniziale. L'andamento lineare permane solo in una zona centrale del bacino che corrisponde alla zona in cui il fluido si trova ancora allo stato liquido.

Il grafico della densità in funzione della profondità agli stessi tempi del grafico precedente (Fig. 7.2), mostra come, già a $t = 5\tau$, lo stato del sistema sia significativamente mutato. Mentre infatti, a $t = 0$, avevamo presenza di vapore solo nei pressi del punto di prelievo, per effetto della depressurizzazione generale del bacino, è comparsa una piccola zona di vapore anche al fondo del serbatoio (vicino a $x = -1$). Questa zona tende poi ad allargarsi, andando lentamente a ricongiungersi con quella al top del serbatoio. Questo effetto, abbastanza sorprendente e imprevedibile, non può essere intercettato dal modello precedente basato sulla presenza di un bordo libero di separazione tra le due regioni del dominio. In quel caso infatti, avevamo fissato fin dall'inizio del modello, la presenza di una regione di vapore al di sopra del fronte, ed una zona di liquido al di sotto di esso.

7.3 L'effetto delle condizioni al bordo

Per valutare l'effetto sul comportamento globale delle condizioni al bordo, proviamo a fare la scelta diametralmente opposta alla precedente in termini di efficienza della ricarica. Mentre nel caso appena esposto ipotizziamo che la trasmissione di ricarica sia talmente lenta da poter essere essenzialmente trascurata, almeno in tempi dell'ordine di quelli di evoluzione del sistema, proviamo a fare l'ipotesi che il bacino fornisca tutto il fluido che serve. Ovvero, facciamo l'ipotesi che la ricarica sia in grado di ripristinare istantaneamente tutto il fluido che viene estratto dal top, mediante una ricarica di liquido al fondo del serbatoio. Questa ipotesi, corrisponde al supporre che il fondo del serbatoio si trovi ad una pressione costante, ad esempio, uguale al valore della pressione idrostatica dell'acqua, a quella profondità.

In altre parole, facciamo ancora l'ipotesi che il flusso in uscita all'estremità superiore sia Ψ .

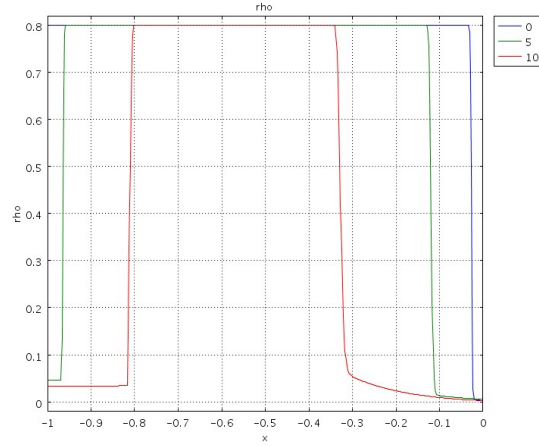


Figura 23: Rappresentazione della densità del fluido a $t = 0$, $t = 5\tau$ e $t = 10\tau$. Con l'andare del tempo, e il decrescere della pressione, la zona di vapore al top del serbatoio, come previsto, sia allarga. Sul fondo del serbatoio, per effetto della costanza della temperatura e dell'espansione del fluido, compare una ulteriore zona di vapore che tende ad allargarsi e, con il passare del tempo, a ricongiungersi con la zona al top del serbatoio. Una volta che il liquido è esaurito, il sistema procederà verso una condizione di equilibrio di tipo vapor-statico.

Al fondo tuttavia, supponiamo ora la pressione fissata $P = P_b = \rho^L g L$ dove L è la profondità di fondo pozzo.

Anche questa volta il dato iniziale prevede una zona di vapore nei pressi della sommità del bacino, ma questa volta, l'estensione di questa zona è molto più ampia, in modo da apprezzarne meglio la variazione per effetto del bilancio tra il prelievo e la ricarica. Come si vede dalla figura 7.3 la ricarica è talmente efficiente, che, non solo viene ripristinato il fluido perso per il prelievo, ma il bacino si assesta in tempi molto brevi su un profilo stazionario lineare idrostatico

$$P_{\text{staz.}} = P_b - \rho^L(1 + x) \quad (7.10)$$

Questa configurazione stazionaria, con la pressione assestata su un profilo idrostatico, implica che il bacino si è completamente riempito di acqua liquida ed è completamente indipendente sia dal rate di prelievo, sia dai valori scelti di permeabilità e porosità per il sistema che influenzano, eventualmente, solo il tempo entro il quale il sistema si trova in condizioni stazionarie.

A conferma di quanto stiamo dicendo, ovvero che l'imposizione di una pressione idrostatica come condizione al bordo per la ricarica rischia di falsare la simulazione, rappresentiamo in Fig. 7.3 l'andamento della densità agli stessi istanti della Fig. 7.3. Come si vede in Fig. 7.3 la zona di vapore inizialmente presente nella vicinanze del bordo superiore è riempita molto rapidamente di liquido. La soluzione si assesta quindi in tempi molto brevi (rispetto al tempo caratteristico) su una soluzione stazionaria di solo liquido. Questo effetto, chiaramente controintuitivo, è legato alla scelta che abbiamo fatto di impostare una condizione al bordo di pressione fissata (e non di flusso ad esempio) al bordo inferiore del dominio. Questo valore della pressione tende a dominare l'andamento della soluzione in quanto forza il sistema ad assecondarlo. Lo stesso effetto non si avrebbe se si imponesse una condizione diversa a fondo pozzo, ma impostando una condizione di pressione fissata al bordo superiore. A titolo di completezza, mostriamo l'andamento della pressione a diversi istanti nell'ipotesi di bacino isolato sul fondo e con un valore della pressione fissata all'estremo superiore. Come si vede dalla Fig. 7.3, il sistema in questa nuova configurazione

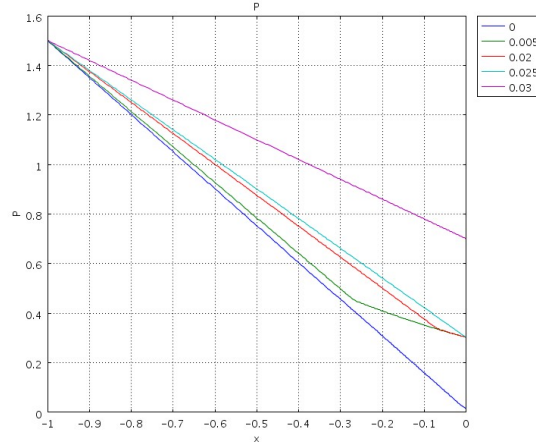


Figura 24: Rappresentazione dell'andamento della pressione adimensionale P in funzione della quota a diverse frazioni di tempo caratteristico τ . Il profilo lineare iniziale si modifica in un profilo con caratteristiche diverse via via che la pressione del bacino sale su tutto il dominio, per assestarsi, già dopo un tempo pari a $t = 0.03\tau$ (circa tre mesi) su un profilo idrostatico stazionario.

ha un comportamento abbastanza simile a quello già mostrato in Fig. 7.2, con la comparsa di una zona di vapore a fondo pozzo e il contemporaneamente della zona di vapore già presente a $t = 0$ all'estremità superiore del bacino. La differenza principale rispetto a quel caso, e non è un comportamento inaspettato, consiste nella convergenza della soluzione ad un profilo stazionario, che non avevamo osservato nel caso precedente, in cui avevamo imposto una condizione di flusso uscente al bordo superiore. La differenza tra i due comportamenti è ancora una volta coerente con la fisica del problema. La condizione di flusso costante tende infatti a depauperare il bacino, senza tenere conto del valore di pressione a cui si viene a trovare il fluido. Portando la simulazione a tempi lunghi, la condizione di flusso uscente costante tenderebbe a portare il bacino a pressioni molto basse, incompatibili con la produzione. Viceversa, imporre un valore della pressione al top porta il bacino ad equilibrarsi a quel valore della pressione.

Mettendo insieme le considerazioni fatte, potremmo concludere che le due condizioni utilizzate all'estremità superiore, ovvero di flusso o di pressione, sono essenzialmente equivalenti finché il bacino è ancora distante da potenziali soluzioni stazionarie. Via via che ci si avvicina al profilo stazionario, il flusso derivante dalla condizione di Neumann tende ad assumere un valore proporzionale al gradiente della pressione nei pressi del bordo. Se, viceversa, continuiamo a prelevare a ritmo costante, il bacino non raggiunge mai l'equilibrio e tende a svuotarsi completamente di fluido.

7.4 Qualche riflessione

I semplici casi unidimensionali che abbiamo analizzato, senza la pretesa di essere in alcun modo esaustivi della casistica né, tanto meno, essere quantitativamente esemplificativi di una vera e propria simulazione full field, forniscono alcune utili indicazioni al comportamento del modello di conservazione tipico di questi sistemi.

La prima riflessione che possiamo fare riguarda la comparsa della regione di vapore al fondo del bacino, che non poteva essere prevista nel modello con il contorno libero e che configura come potenzialmente stabili scenari in cui la fase liquida possa trovarsi al di sopra della fase

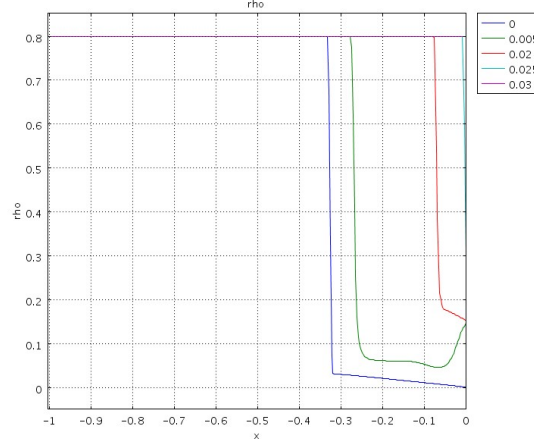


Figura 25: Andamento della densità del fluido rispetto alla quota adimensionale a diverse frazioni di tempo caratteristico τ . La regione di vapore inizialmente situata alla sommità del bacino scompare molto rapidamente e già a $t = 0.03\tau$ (circa tre mesi) è completamente riempita di liquido. Questo effetto è dovuto all'eccesso di ricarica dato dalla scelta di imporre un valore di pressione fissato al bordo inferiore del dominio che forza il sistema ad un condizione stazionaria in tempi molto brevi rispetto al tempo caratteristico.

vapore. Sebbene nel nostro caso questo fenomeno sia in parte dovuto all'aver fissato il profilo di temperatura, mentre abbiamo permesso al fluido di espandere, questo fenomeno merita qualche approfondimento. Nel nostro modello, avendo fissato la temperatura, essenzialmente si verifica una espansione isoterma che presuppone, in pratica, che il sistema (ovvero la roccia) stia cedendo energia al fluido in espansione, in modo da mantenerne costante la temperatura. Nel caso reale, il fluido in espansione tenderà a raffreddarsi e quindi a sottrarre energia alle rocce che si trovano ad una temperatura superiore. L'ipotesi di equilibrio termico tra fluido e rocce semplifica questo scenario, ipotizzando che la temperatura a cui si trova il sistema fluido+roccia sia, essenzialmente, una media tra le due temperature, pesata per i rispettivi calori specifici. Il risultato è, in ogni caso, che nel modello completo il fluido in espansione (e con esso le rocce con cui esso è a contatto) tenderà a raffreddarsi. Tanto più velocemente il fluido si raffredda, tanto più, nonostante l'espansione, il fluido potrebbe non vaporizzare (almeno al di sotto della zona di liquido). Tuttavia, trattandosi di due fenomeni in competizione, espansione e raffreddamento, che tendono a far vaporizzare il fluido il primo e a condensarlo il secondo, non è detto che domini l'uno o l'altro. Tutto dipende essenzialmente dall'efficienza di accoppiamento conduttivo/convettivo tra fluido e roccia (nel caso reale) ovvero, dai valori del calore specifico e della conducibilità termica dei materiali in contatto (nel linguaggio del modello normalmente utilizzato, tipo TOUGH). Ecco quindi che l'ipotesi che avevamo fatto nel modello con contorno libero, cioè che il gas tenda sempre a stare al di sopra del liquido, potrebbe non essere strettamente vera, in quanto la termodinamica potrebbe guidare alcune zone di fluido a vaporizzare, pur trovandosi al di sotto di altre zone in cui il fluido si trova allo stato liquido.

La seconda considerazione che ci sentiamo di fare, sebbene con le dovute cautele rispetto al caso completo tridimensionale, riguarda la scelta di condizioni al bordo. Abbiamo verificato, nella breve analisi svolta, che la scelta di una condizione tipo Neumann sulla pressione (ma lo stesso si verificherebbe se avessimo risolto anche l'equazione dell'energia e avessimo imposto un valore fissato di temperatura ad un bordo), per la natura delle equazioni di conservazione che stiamo

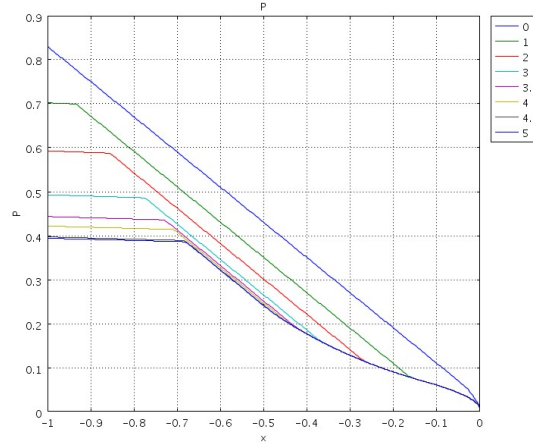


Figura 26: Andamento della pressione in funzione della quota a diversi istanti tra $t = 0$ e $t = 5\tau$. La pressione decresce su tutto il dominio fino ad assestarsi su un profilo stazionario in cui la regione di vapore alla sommità del bacino si è allargata molto. Una regione di vapore è comparsa a fondo pozzo, come già osservato nel primo caso mostrato.

risolvendo, tende a portare il sistema verso una soluzione stazionaria. Sebbene questo possa sembrare, a prima vista, un fatto positivo, occorre scegliere con cautela la condizione da imporre, per evitare che la soluzione stazionaria ottenuta non sia del tutto innaturale e controintuitiva, come quella che abbiamo ottenuto imponendo un valore fissato di pressione idrostatica al bordo inferiore del dominio. La soluzione stazionaria che abbiamo ottenuto impostando la condizione sulla pressione al top (mentre abbiamo imposto una condizione di flusso nullo al fondo) sembra, a prima vista, più naturale. Tuttavia, ad un esame più attento, anch'essa sembra scontrarsi con l'intuito. Se infatti lasciassimo degassare un bacino pieno di fluido a temperatura costante e isolato sul fondo senza ricaricare il fluido perduto, ci immagineremmo che il flusso di vapore alla sommità possa durare solo un tempo limitato. Ad un certo punto, il bacino sarà completamente degassato e la pressione alla sommità uguaglierà la pressione immediatamente fuori dal bacino, annullando, di fatto, la perdita di materiale (omettiamo per semplicità la gravità che gioca sicuramente un ruolo trascurabile). Tuttavia, se plottiamo l'andamento della velocità di Darcy del gas al bordo superiore (valore adimensionalizzato), in funzione del tempo, vediamo che, nell'ultimo caso che abbiamo mostrato, essa non si annulla mai e raggiunge un valore stazionario positivo (Fig. 7.4). Una velocità (e quindi un flusso) di gas positiva al bordo superiore, implica necessariamente che il gas stia uscendo, anche in condizioni stazionarie, dal bacino. Tuttavia, l'ipotesi di flusso nullo sul fondo escluderebbe una ricarica del bacino. Un semplice ragionamento sulla conservazione globale della massa, ci porterebbe a pensare che il fluido viene in qualche modo generato all'interno del bacino. Tuttavia, avendo utilizzato l'equazione di continuità omogenea, abbiamo escluso la presenza di sorgenti all'interno del dominio. La risposta è ancora una volta da cercare nella condizione di Neumann che abbiamo imposto al bordo superiore. Come dicevamo infatti, se avessimo lasciato espandere liberamente il fluido alla sommità, il flusso di materiale si sarebbe fermato quando la pressione immediatamente upstream rispetto all'uscita (immediatamente sotto il bordo superiore) uguaglia quella immediatamente downstream (immediatamente fuori del bacino). Ovvero, il flusso si annulla quando il gradiente della pressione si annulla (salvo effetti della gravità). Avendo imposto che il valore della pressione alla sommità assuma un valore costante, abbiamo automaticamente escluso questa ipotesi in quanto abbiamo

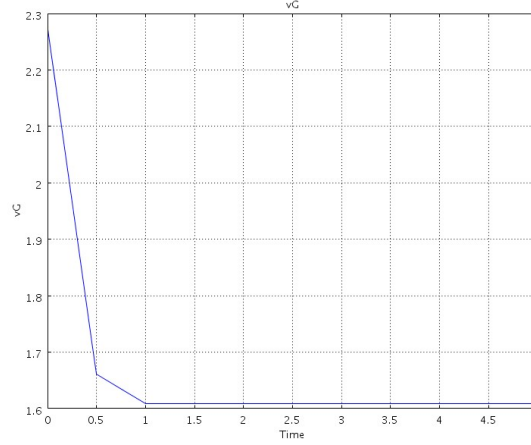


Figura 27: Rappresentazione della velocità di Darcy del Gas v^G adimensionale, rispetto al tempo adimensionale t/τ al bordo superiore, nel caso di condizione al bordo di Neumann. La velocità raggiunge rapidamente un valore stazionario positivo, indice del fatto che il bacino continua a perdere fluido, nonostante l'ipotesi di flusso nullo sul fondo non permetta una ricarica.

ipotizzato, in buona sostanza, che il fluido che viene perso viene in qualche modo rimpiazzato da altro fluido, in modo da mantenere costante la pressione alla sommità (ricordiamo che abbiamo anche costanza di temperatura).

Tutto questo ci porta ad una semplice conclusione: *l'utilizzo di condizioni di Neumann (di pressione certamente, ma anche, ragionevolmente per la temperatura del sistema) devono essere utilizzate con molta cautela in quanto spingono il sistema verso una stazionarietà che potrebbe non essere coerente con la realtà fisica che vogliamo rappresentare. Certamente la condizione di Neumann potrà essere utilizzata in quei casi in cui siamo abbastanza certi che il bordo si trovi ad una distanza tale da non influenzare, nei tempi che interessano la simulazione, il risultato della simulazione stessa. In altre parole, dobbiamo essere certi, attraverso una opportuna scaling analysis basata sulle grandezze tipiche del sistema, che il time scale del sistema (tempo entro il quale la soluzione potrebbe tendere alla stazionarietà) sia molto maggiore del tempo della simulazione.*

La seconda considerazione, detto ciò, diventa piuttosto banale, ovvero la condizione da utilizzare dovrebbe essere una condizione di flusso, a patto di avere una stima ragionevole dei flussi di ricarica e a patto di imporre una limitazione al flusso in uscita dai pozzi, basato sulla verifica che il gradiente della pressione upstream il pozzo sia maggiore del flusso in uscita. Quando questa condizione non è verificata, il flusso deve essere ridotto proporzionalmente al gradiente di pressione, in modo da non portare il bacino alla completa degassazione.

8 Piano di lavoro per attività futura

Il contributo del dipartimento di Matematica al progetto MAC-GEO, oltre ad una generale ricognizione del modello matematico generale e delle possibili modalità di trattazione numerica, si è focalizzato principalmente su tre aspetti

- L'equilibrio termodinamico liquido-gas multicomponente
- La stesura e soluzione di un modello semplificato 1D del bacino

- L'utilizzo di modelli più raffinati per quanto riguarda la conservazione del momento dei fluidi, rispetto alla legge di Darcy

Oltre a questi tre filoni principali di attività, alcune parti del lavoro, svolte con il supporto di I2T3, hanno riguardato la modellazione dei flussi multifase, il modello di pozzo stazionario, le condizioni al bordo da imporre al bacino e la generazione di dati di sottocluster di pozzi, a partire dalle informazioni fornite da Enel sui cluster. Il resoconto di queste attività è contenuto nel rapporto redatto da I2T3 a conclusione del contratto di collaborazione.

La prima parte di attività può dirsi sostanzialmente conclusa, in quanto, come abbiamo esposto nelle sezioni precedenti, è stata definita una modalità di soluzione dell'equilibrio termodinamico, elaborato un algoritmo di soluzione dell'equilibrio e implementato in un codice di soluzione numerica (a cura del Dr. Ceseri). Allo stato attuale, il codice permette la soluzione dell'equilibrio liq-gas per una miscela qualsiasi, a partire dall'equazione Peng-Robinson.

Il prossimo passo, una volta verificate le funzionalità di base e alcune introdotte alcuni test sulla stabilità dell'equilibrio termodinamico, sarà quello di introdurre la salinità dell'acqua, a partire dal metodo proposto da Sørense e Whitson [20] e ripreso da Perez e Heideman [15]. Dato il livello di conoscenza dei fluidi profondi, e dato il livello di approssimazione del modello generale, si valuterà in quella fase se la salinità deve essere effettivamente calcolata di volta in volta, accoppiando quindi il calcolo del flash ad un sistema di calcolo della concentrazione di sale disciolto o cristallizzato in funzione dei valori di pressione o temperatura, o, viceversa, se si può supporre la salinità fissata. Questa seconda ipotesi appare in realtà abbastanza ragionevole, in quanto l'effetto principale della salinità è quello di modificare la capacità del brine di sciogliere NCG (*non condensible gas*), rispetto all'acqua. Sebbene questa capacità (che in effetti modifica l'equilibrio termodinamico) sia ovviamente influenzata dalla concentrazione di sale, la variazione temporale della salinità non dovrebbe avere effetti drastici, se non al livello locale (il livello locale tuttavia non può essere rappresentato correttamente da un modello *full field*). Al livello di bacino quindi, potrebbe essere significativo l'inserimento di una certa salinità, eventualmente dipendente dalle variabili spaziali (o almeno dalla quota). Non è tuttavia chiaro se la variazione locale dovuta alla modifica dei parametri termodinamici (soprattutto la temperatura) possa influenzare in maniera significativa la concentrazione di sale disciolto e quindi, indirettamente, l'equilibrio liquido-gas. Questa considerazione verrà comunque fatta nel dettaglio nel momento in cui la salinità sarà implementata e se ne potrà verificare l'effetto sulla soluzione del flash. Da notare, che questa attività porterà verosimilmente alla elaborazione di più di una pubblicazione, una delle quali è in via di sottimissione.

Per quanto riguarda il modello 1D del bacino, come abbiamo visto nella sezione precedente, nonostante le forti semplificazioni il modello è in grado di fornire alcune indicazioni interessanti che, probabilmente, possono essere replicate nel modello completo. La naturale estensione del modello, senza introdurre la complessità del modello compositivo generale, potrebbe essere l'introduzione di una ulteriore variabile spaziale (la distanza dal prelievo ad esempio), per elaborare un modello 3D a simmetria cilindrica. Sebbene anche questo modello andrebbe solo valutato qualitativamente, e sebbene esso mostri molte delle limitazioni del modello 1D, riteniamo che potrebbe comunque permettere di fare considerazioni interessanti sul caso reale. Ricordiamo infatti come la presenza di un fronte di saturazione (vagamente a simmetria cilindrica) è già stato ipotizzato anche da Enel nella modellazione di Larderello. Una caratteristica simile, sebbene al livello del cluster di pozzo, più che del bacino intero, potrebbe essere verificata anche all'Amiata. Sebbene infatti il bacino dell'Amiata sia un sistema *water dominated*, un banale calcolo dell'entalpia del fluido in uscita, sembra indicare che in entrata al pozzo di prelievo (a fondo pozzo cioè) la sola presenza di liquido è impossibile. È verosimile quindi che, per effetto dell'espansione nei pressi del prelievo, localmente si verifichi una parziale vaporizzazione del fluido geotermico

che si introduce quindi in miscela bifase nel pozzo di risalita. Se questo fosse effettivamente ciò che avviene, non è escluso che si possa verificare, per tempi lunghi, la formazione di un fronte di vaporizzazione che circonda un intero cluster di pozzi. Chiaramente, trattandosi di una miscela, il fronte separerebbe la fase liquida da una zona bi-fase liquido-vapore, piuttosto che monofase vapore. Il comportamento fluidodinamico del sistema potrebbe tuttavia non differire molto dal modello monocomponente con una separazione netta tra liquido e vapore, che vorremmo simulare.

Il modello 1D con densità discontinua ci ha permesso di fare considerazioni importanti e, con ogni probabilità generali, sulle condizioni al bordo da utilizzare e sulle grandezze di scaling del problema. L'attività in corso prevede l'estensione del modello ad un modello 2D a simmetria cilindrica ed un modello 2D di una sezione verticale di un cluster che ci permetta di verificare le considerazioni fatte, ovvero che le zone di gas potrebbero essere più di una e non necessariamente a quote inferiori del liquido e che le condizioni al bordo di Neumann possono portare a soluzioni stazionarie in qualche modo artefatte. Questa attività viene svolta in collaborazione con il Dr. Ceseri del Dip. di Matematica e gli altri partecipanti al progetto e con il contributo di I2T3 che possiede la licenza di Comsol Multiphysics su cui le simulazioni mostrate sono state svolte. Per questa parte di attività si sta valutando l'opportunità di raccogliere le informazioni in una o più pubblicazioni.

Riguardo l'utilizzo di estensioni della legge di Darcy nelle zone di bacino vicine ai punti di prelievo, ricordiamo che il corrispondente algoritmo (v. Sez. 4) è stato tradotto in un modulo *Fortran90* denominato **DNDmultiphase**. Questo permetterà l'integrazione di questa parte all'interno di codici quali *Tough2*, qualora in futuro ci sia interesse nell'aggiungere un maggior dettaglio nell'analisi dei flussi vicino alle zone estrattive. Come già ricordato nella Sez. 4, la descrizione di questa parte è reperibile in un lavoro in corso di pubblicazione (I. Borsi, L. Fusi, F. Rosso, A. Speranza, A well deliverability model for multi-phase non-Darcian flow in geothermal reservoirs, inviato a *Computers & Geosciences*).

Per quanto riguarda infine l'utilizzo di relazioni non lineari per la conservazione del momento dei fluidi, i modelli sviluppati hanno permesso di evidenziare la notevole differenza dei risultati ottenuti rispetto al caso darciano. In particolare abbiamo osservato che l'evoluzione dell'intero sistema risulta drasticamente diversa nel caso in cui gli effetti inerziali siano presi in considerazione. Nonostante l'ovvio incremento di complessità nel caso di modelli non lineari (ad esempio Forchheimer), c'è tuttavia da sottolineare che la struttura matematica del problema rimane sostanzialmente la stessa (le equazioni di evoluzione risultano alla fine sempre paraboliche degeneri) del caso darciano. Sembra ragionevole dunque cercare un'approccio costitutivo di tipo nonlineare, dove il caso lineare è ottenuto mediante l'annullamento di alcuni parametri fisici del problema.

Il passo successivo, su cui stiamo lavorando, è quello di inglobare nella modellizzazione la presenza di più componenti che possono trovarsi nella fase gassosa e liquida. I modelli fin qui sviluppati infatti assumono che il fluido sia mono-componente, quando invece all'interno di un bacino geotermico i fluidi e gas presenti, sono certamente più d'uno. Questa estensione complica sicuramente la modellizzazione matematica, soprattutto perchè al "set" di equazioni che definiscono il problema dobbiamo aggiungere quelle di evoluzione delle frazioni molari delle singole componenti. Inoltre l'equazione di Kelvin (nel caso siano presenti effetti capillari) deve essere generalizzata al caso di più componenti.

Riferimenti bibliografici

- [1] M.T. Balhoff and Wheeler M.F. Predictive pore-scale model for non-darcy flow in anisotropic media. *SPE*, 110838, 2007.
- [2] M.T. Balhoff, A. Mikelić, and Wheeler M.F. Polynomial filtration laws for low reynolds number flows through porous media. *Transport in Porous Media*, DOI 10.1007/s11242-009-9388-z:35–60, 2010.
- [3] I. Borsi., M. Ceseri, L. Fusi, F. Rosso, and A. Speranza. Weak formulation for a two-phase nonlinear flow of a compressible fluid in an undeformable porous medium. *to be submitted*.
- [4] I. Borsi., L. Fusi, F. Rosso, and A. Speranza. Isothermal two-phase flow of a vapor-liquid system with non-negligible inertial effects. *submitted to International Journal of Engineering Science*.
- [5] Zhangxin Chen, Guanren Huan, and Yuanle Ma. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Computational Science & Engineering. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 531 pp., 2006.
- [6] T.H. Chilton and A.P. Colburn. Pressure drop in packed tubes. *Industrial and Engineering Chemistry*, 23 (8):913–919, 1931.
- [7] R.E. Collins. *Flows of fluids through porous media*. New York. Reinhold, 1961.
- [8] AB Comsol. COMSOL multiphysics user’s guide. *Version: September*, 2005.
- [9] R. Di Pippo. *Geothermal Power Plants*. Elsevier, Oxford, 493 pp, 2008.
- [10] R.E. Ergun. Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, 48 (2):89–94, 1952.
- [11] Teklu Hadgu, Robert W. Zimmerman, and Gudmundur S. Bodvarsson. Coupled reservoir-wellbore simulation of geothermal reservoir behavior. *Geothermics*, 24(2):145–166, 1995.
- [12] L. Meacci. Modellazione di bacini geotermici. Master’s thesis, Dip. di Matematica U. Dini, Università degli Studi di Firenze, Firenze, Italy, 2008.
- [13] J.L. Miskimins, H.D. Lopez-Hernandez, and R.D. Barree. Non-darcy flow in hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, March:57–59, 2006.
- [14] M.J. OSullivan. Geothermal reservoir simulation. *Energy Research*, 369:313–332, 1985.
- [15] R.J. Perez and R.A. Heidemann. Coupling an equation of state and Henry’s Law to model the phase equilibria of gases and brines Examples in the N₂–H₂O–NaCl system. *Journal of Geochemical Exploration*, 89(1-3):331–334, 2006.
- [16] P. Polubarinova-Kochina. *Theory of ground water movement*. Princeton University Press, 1962.
- [17] J.W. Pritchett. Star: A geothermal reservoir simulation system. In *The WGC-1995 World Geothermal Congress*, pages 2959–2963, Florence, Italy, 1995.
- [18] K. Pruess. *Tough2 User’s guide, Version 2.0*. Univ. of California, Berkeley, 198 pp, 1999.

-
- [19] R.G. Shepherd. Correlations of permeability and grain size. *Ground Water*, 27:633–638, 1989.
- [20] I. Søreide and CH Whitson. Peng-Robinson predictions for hydrocarbons, CO₂ ?, N₂, and H₂S with pure water and NaCl brine. *Fluid phase equilibria*, 77:217–240, 1992.
- [21] G. G. Tsypkin, C. Calore, and M. Marcolini. Mathematical modeling of cold water injection into a depleted high-temperature geothermal reservoir. *HIGH TEMPERATURE*, 44(3):450–457, MAY-JUN 2006.
- [22] G.G. Tsypkin and C. Calore. Role of capillary forces in vapour extraction from low-permeability, water-saturated geothermal reservoirs. *Geothermics*, 32(3):219–237, 2003.
- [23] GG Tsypkin and C. Calore. Influence of capillary forces on water injection into hot rock, saturated with superheated vapour. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15-16):3195–3202, 2007.
- [24] G.G. Tsypkin and A.W. Woods. Vapour extraction from a water-saturated geothermal reservoir. *Journal of Fluid Mechanics*, 506:315–330, 2004.
- [25] J.C. Ward. Turbulent flow in porous media. *Proceedings of the American Society of Civil Engineering*, 90:1–12, 1964.
- [26] S. Whitaker. The forchheimer equation: a theoretical development. *Transport in Porous Media*, 25:27–61, 1996.
- [27] Yu-Shu Wu. Numerical simulation of single-phase and multiphase non-Darcy flow in porous and fractured reservoirs. *Transport in Porous Media*, 49(2):209–240, 2002.